

На правах рукописи



Султанов Оскар Анварович

УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАТУХАЮЩИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Уфа – 2026

Работа выполнена в отделе дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром — обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук.

Официальные оппоненты: **Глызин Сергей Дмитриевич,**

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерных сетей ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»;

Лерман Лев Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории топологических методов в динамике ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» в Нижнем Новгороде;

Сесекин Александр Николаевич,

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и механики ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина».

Ведущая организация:

ФГБУН Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва.

Защита состоится 26 июня 2026 г. в 12:00 на заседании объединённого диссертационного совета 99.0.110.02, созданного на базе ФГБНУ Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий», по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» и на сайте <https://uust.ru>.

Автореферат разослан «_____» _____ 2026 г.

Учёный секретарь

диссертационного совета,

доктор физико-математических наук



Исаев Константин Петрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Моделирование широкого спектра явлений и процессов в природе приводит к динамическим системам, подверженным внешним и внутренним возмущениям: шумам данных, неопределённостям в параметрах, сезонным и структурным флуктуациям. Анализ влияния возмущений на устойчивость и глобальные свойства решений является классической проблемой качественной теории дифференциальных уравнений, основы которой были заложены в работах А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова в конце XIX века. Результаты таких исследований позволяют судить о надёжности и корректности моделей, прогнозировать долгосрочное поведение систем, а также разрабатывать эффективные методы управления динамикой.

Многие современные задачи нелинейной математической физики сводятся к изучению дифференциальных уравнений с возмущениями, интенсивность которых затухает со временем. Например, такие возмущения встречаются при исследовании решений уравнений Пенлеве, в задачах самофокусировки и аномальной диффузии, при моделировании процесса формирования планет из протосолнечной туманности, в задачах синхронизации осцилляторов, стабилизации движений твёрдых тел, изучения устойчивости сплавов с памятью формы, стохастической аппроксимации и глобальной оптимизации, в моделях распространения эпидемий, движения газа через пористую среду, динамики шарового скопления звёзд и ДНК. Такие воздействия могут быть связаны с переходными процессами, внешними импульсами, реакциями на кратковременные изменения параметров или исчерпанием ресурсов.

Для автономных и периодических возмущений с малой постоянной интенсивностью многие задачи удаётся решить с помощью известных результатов и методов теории устойчивости, теории бифуркаций и асимптотического анализа. Явление затягивания потери устойчивости и перестройки решений в системах с медленно меняющимися возмущениями, содержащими малый параметр, подробно изучаются в теории динамических бифуркаций. Однако в настоящей работе наличие малого параметра не предполагается, и рассматриваются эффекты другого типа. Влияние возмущений с затухающей интенсивностью изучено значительно меньше. В этом случае возмущённая динамика описывается с помощью асимптотически автономных систем в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

где для любого компактного множества $D \subset \mathbb{R}^\ell$ существует предел $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно для всех $\mathbf{x} \in D$. Вектор-функция $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ соответствует возмущению предельной автономной системы

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}). \quad (2)$$

Известно, что такие возмущения могут существенно повлиять на качественные и асимптотические свойства решений предельных уравнений. Настоящая работа посвящена развитию методов исследования устойчивости и асимптотического анализа, позволяющих эффективно оценивать влияние различных классов затухающих детерминированных и стохастических возмущений типа белого шума на глобальные свойства решений нелинейных систем.

Первая часть работы посвящена детерминированным возмущениям нелинейных гамильтоновых систем на плоскости:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\partial_{x_2} H(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2, t), \quad \frac{dx_2}{dt} = \partial_{x_1} H(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2, t). \quad (3)$$

Предполагается, что функции $H(x_1, x_2)$, $g_1(x_1, x_2, t)$ и $g_2(x_1, x_2, t)$ являются бесконечно дифференцируемыми для всех $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ и $t \geq t_0$. Изучается влияние возмущений на устойчивость, локальные бифуркации и асимптотическое поведение решений на бесконечности по независимой переменной. От возмущений не требуется сохранения гамильтоновой структуры уравнений, но предполагается степенная асимптотика

$$g_i(x_1, x_2, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} g_{i,k}(x_1, x_2, S(t)), \quad t \rightarrow \infty, \quad q \in \mathbb{Z}_+ := \{1, 2, \dots\} \quad (4)$$

с коэффициентами, зависящими периодически от некоторой заданной функции $S(t)$. В частности, рассматриваются возмущения с асимптотически постоянной частотой $S'(t) \sim s$, с чирпированной частотой (chirped frequency) $S'(t) \sim st^\nu$ при $\nu > 0$, а также неосциллирующие возмущения с $S'(t) \equiv 0$.

Вторая часть работы посвящена случайным возмущениям типа белого шума. Под белым шумом понимается стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым средним значением и постоянной спектральной плотностью. Для такого процесса ковариационная функция имеет вид δ -функции Дирака, а дисперсия бесконечна. Поэтому такие возмущения обычно понимаются в обобщённом смысле и используются для моделирования воздействий, которые быстро меняются и не коррелируют в различные моменты времени.

В этом случае возмущённые уравнения имеют вид стохастических дифференциальных уравнений Ито и записываются в форме дифференциалов

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)) dt + \mu \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{w}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^\ell,$$

которая является сокращённой записью интегрального уравнения

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t (\mathbf{f}(\mathbf{x}(s)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(s), s)) ds + \mu \int_{t_0}^t \mathbf{G}(\mathbf{x}(s), s) d\mathbf{w}(s),$$

где $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), \dots, w_\ell(t))^T$ — многомерный винеровский процесс, определённый на некотором вероятностном пространстве, $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ — гладкая матрица размерности $\ell \times \ell$, $\mu > 0$ — параметр, который используется для контроля за интенсивностью шума, и последнее слагаемое — стохастический интеграл Ито. Известно, что даже слабые случайные возмущения способны существенно изменить поведение решений детерминированных систем: например, привести к потере устойчивости равновесия и выходу траекторий из любой ограниченной области.

В работе рассматриваются мультипликативные стохастические возмущения асимптотически автономных систем вида (3). В этом случае $\ell = 2$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv (\partial_{x_2} H(x_1, x_2), -\partial_{x_1} H(x_1, x_2))^T$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \equiv (g_1(x_1, x_2, t), g_2(x_1, x_2, t))^T$. Предполагается, что для коэффициентов матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) \equiv \{G_{i,j}(x_1, x_2, t)\}_{2 \times 2}$ справедливы асимптотические разложения, аналогичные (4). Исследуется влияние шума на устойчивость, бифуркации и поведение траекторий решений на далеких временах.

Степень разработанности темы исследования. Для линейных систем с почти постоянными коэффициентами вопросы об асимптотике решений на бесконечности по независимой переменной обсуждались в работах О. Перрона, Н. Левинсона, А. Винтнера, Ф.В. Аткинсона, П. Хартмана, А. Девинаца, У.А. Хариса и Д.А. Латса, Дж.С. Кассела, М. Пинто, В.Ш. Бурда, А. Самойленко, Ю.А. Коняева, П.Н. Нестерова, Н.Ф. Валеева и Я.Т. Султанаева при различных ограничениях на затухающие возмущения. Близкие задачи об исследовании индекса дефекта и спектра соответствующих дифференциальных операторов рассматривались в работах М.А. Наймарка, Б. Саймона, М.В. Федорюка, А. Девинаца, Дж.Д. Долларда и Ч.Н. Фридмана, М. Бен-Арци, М. Истхэма, А. Киселева, С. Денисова и М. Лукича.

Асимптотика решений на бесконечности для различных классов нелинейных неавтономных систем исследовалась в работах А.Д. Брюно, В.В. Коз-

лова и С.Д. Фурты, где для построения главных членов асимптотики выводились соответствующие укороченные уравнения. При этом наиболее характерной формой асимптотических разложений оказывались ряды по степеням и логарифмам независимой переменной с постоянными коэффициентами. Построение асимптотических решений в форме степенных рядов с осциллирующими коэффициентами обсуждалось в работах П. Бутру, В.Ю. Новокшенова, А.Р. Итса, А.А. Капаева, А.В. Китаева, Б.И. Сулейманова, А.Д. Брюно, И.В. Горючкиной, Л.А. Калякина. Вопросы обоснования формальных асимптотических конструкций изучались в работах А.Н. Кузнецова, Л.А. Калякина, Р.Р. Гонцова и И.В. Горючкиной. Эффекты от затухающих возмущений на долговременное поведение решений в известных работах не обсуждались.

Качественное исследование асимптотически автономных систем восходит к работе Л. Маркуса¹, где обсуждалась связь между поведением траекторий возмущённой системы и свойствами решений предельных уравнений, а также обобщалась теория Пуанкаре-Бендиксона на асимптотически автономные плоские системы. В частности, было доказано, что если предельная система имеет локально асимптотически устойчивую неподвижную точку, то она является аттрактором для возмущённой системы. Кроме того, если все траектории предельной системы являются неограниченными, то и решения асимптотически автономной системы также неограничены. Близкие вопросы обсуждались в работах Р. Беллмана, где для линейных асимптотически автономных систем исследовались условия сохранения ограниченности решений. Задачи об устойчивости равновесия по Ляпунову в системах с неавтономными возмущениями, интегрируемыми на полуоси, обсуждались в работах И. Вркоча, Ф. Брауэра, Т. Ёсидзавы, А. Штрауса и Дж.А. Йорка при довольно жёстких ограничениях на невозмущённые уравнения. Например, предполагалось наличие глобальной функции Ляпунова, линейность правой части системы, экспоненциальная или асимптотическая устойчивость. Результаты Л. Маркуса уточнялись и обобщались на асимптотически автономные полупотоки в работе Х. Тиме², где также исследовались примеры асимптотически автономных систем, демонстрирующие поведение отличное от динамики соответствующих предельных уравнений.

Работа Л. Маркуса стимулировала дальнейшие исследования, посвящён-

¹ Markus L. Asymptotically autonomous differential systems // Contributions to the theory of nonlinear oscillations III, Ann. Math. Stud., vol. 36. Princeton : Princeton University Press, 1956. P. 17–29.

² Thieme H. Rocky Mountain J. Math. 1994. Vol. 24. P. 351–380

ные качественным свойствам неавтономных систем дифференциальных уравнений. В частности, в работах Дж.Р. Селла развивался подход, позволяющий свести изучение неавтономных уравнений к исследованию динамических систем на расширенном пространстве, построенном на множестве трансляций правых частей. Ключевое место при этом занимают соответствующие предельные уравнения, полученные как сходящаяся в определённой топологии последовательность сдвигов правой части. Применение такого подхода в задачах об устойчивости неавтономных систем содержится в ³, где различные свойства решений выводятся на основе анализа предельных уравнений. В частности, для асимптотически автономных систем показано, что если предельная система (2) имеет функцию Ляпунова $V(\mathbf{y})$ и множество $\mathfrak{E} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\ell : dV/dt = 0\}$ является компактным и асимптотически устойчивым, то любое ограниченное решение возмущённой системы (1) сходится к \mathfrak{E} . Другой подход, основанный на понятии равномерной эквивалентности, к исследованию и классификации неавтономных векторных полей на замкнутых многообразиях при наличии у интегральных кривых экспоненциальной дихотомии содержится в работах Л.М. Лермана и В.З. Гринеса. В работах В.А. Плисса рассматривались ограниченные решения, и обсуждались вопросы структурной устойчивости неавтономных систем с произвольной зависимостью от времени. При этом одним из ключевых условий выступала гиперболичность соответствующей линеаризованной системы на каждом отрезке разбиения временной оси.

Бифуркации в неавтономных и асимптотически автономных системах изучались в ⁴, где вводились понятия устойчивости решений и аттрактора, основанные на идеи pullback-сходимости, при которой фиксируется текущий момент времени t , а предел рассматривается при устремлении начального момента t_0 к минус бесконечности. Используя эти понятия, для скалярных уравнений с коэффициентами, зависящими от времени, анализировались бифуркации, связанные с изменением pullback-устойчивости и появлением новых устойчивых состояний. Похожие уравнения рассматривались в ⁵, где под бифуркацией понималось (непрерывное или разрывное) изменение структуры pullback-аттрактора при вариации параметров системы. В ⁶ бифуркации

³ Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А. Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев : Наукова думка, 1990.

⁴ Langa J.A., Robinson J.C., Suárez A. Nonlinearity. 2002. Vol. 15. P. 887–903.

⁵ Kloeden P.E., Siegmund S. Int. J. Bifurcat. Chaos. 2005. Vol. 15. P. 743–762.

⁶ Rasmussen M. Set-Valued Anal. 2008. Vol. 16. P. 821–849.

связывались с изменением структуры области притяжения, и рассматривались примеры бифуркаций асимптотически автономных систем, которые переносятся из предельных уравнений. В ⁷ для неавтономных разностных и обыкновенных дифференциальных уравнений развивалась теория бифуркаций, основанная на методах функционального анализа, в рамках которой в качестве бифурцирующих объектов рассматривались ограниченные решения, а бифуркации понимались как ветвление решений.

Особый интерес в задачах с затухающими возмущениями представляют так называемые критические случаи, когда собственные значения матрицы предельной линеаризованной системы имеют нулевые действительные части. В таких системах соответствующее множество \mathcal{E} , как правило, не является асимптотически устойчивым. Случай чисто мнимых и различных собственных значений рассматривался в работе Л.Д. Пустыльникова ⁸, где обсуждалась «проблема центра», и для аналитической системы обыкновенных дифференциальных уравнений описывались условия, при которых затухающие возмущения не нарушают предельную динамику. Близкими к таким критическим случаям являются задачи о возмущении гамильтоновых систем.

Гамильтоновы системы с затухающими возмущениями рассматривались в ⁹, где доказывалось слабое отклонение решений от инвариантных торов при условии интегрируемости мажоранты возмущений на полуоси. Устойчивость инвариантных торов относительно малых возмущений, экспоненциально затухающих со временем, исследовалась в ¹⁰ для систем с квадратичным по действию гамильтонианом и в ¹¹ для более общих систем. Обобщение этих результатов для возмущений с достаточно быстрым степенным затуханием содержится в ¹². Затухающие негамильтоновы возмущения неавтономных гамильтоновых систем рассматривались в ¹³, где обсуждалась асимптотическая устойчивость равновесия при наличии некоторых специальных оценок как для гамильтониана, так и для возмущающих функций. Отметим, что в настоящей работе наличие гамильтоновой структуры возмущений не предполагается.

⁷ Pötzsche C. *Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B.* 2010. Vol. 14. P. 739–776.

⁸ Пустыльников Л. Д. *Матем. сб.* 1974. Т. 94, № 3. С. 407–429.

⁹ Полехин И.Ю. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* 2012. № 1. С. 47–53.

¹⁰ Fortunati A., Wiggins S. *Regul. Chaotic Dyn.* 2014. Vol. 19, № 5. P. 586–600.

¹¹ Canadell M., de la Llave R. *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 2015. Vol. 310. P. 104–113.

¹² Scarcella D. *Nonlinearity.* 2024. Vol. 37, № 6. P. 065005.

¹³ Leoni G. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1994. Vol. 128. P. 105–125.

Таким образом, в зависимости от свойств как предельных уравнений, так и возмущений, затухающие добавки могут либо сохранять предельную автономную динамику и не оказывать на неё существенного влияния, либо приводить к качественным изменениям в глобальном поведении траекторий. Несмотря на большое число работ, посвящённых асимптотически автономным системам, локальные бифуркации и перестройки решений в гамильтоновых системах под действием затухающих со временем возмущений до сих пор недостаточно изучены. В частности, остаются открытыми вопросы о влиянии нелинейных затухающих возмущений на сохранение и потерю устойчивости предельных систем и на проявление резонансных эффектов в асимптотическом поведении решений на больших временах. Настоящая работа направлена на решение этих задач.

Влияние стохастических возмущений на качественные и асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений исследовалось в работах Г.Дж. Кушнера, М.И. Фрейдлина и А.Д. Вентцеля, А.В. Скорохода, Р.З. Хасьминского, И.Я. Каца и А.А. Мартынюка. Отдельный круг работ посвящён влиянию шума с затухающей интенсивностью. В частности, устойчивость при наличии затухающих случайных возмущений исследовалась в ¹⁴, где предполагалось существование глобальной функции Ляпунова и интегрируемой на полуоси мажоранты $\sigma(t) > 0$ для коэффициентов матрицы диффузии:

$$\Sigma(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu^2}{2} \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) \mathbf{G}^T(\mathbf{x}, t), \quad \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell} \|\Sigma(\mathbf{x}, t)\| \leq \sigma(t), \quad \int_{t_0}^{\infty} \sigma(s) ds < \infty.$$

Более слабые условия рассматривались в ¹⁵, где исследовалась устойчивость равновесия скалярных уравнений с коэффициентом диффузии, не интегрируемым на полуоси и стремящимся к нулю на бесконечности по времени так, что сходится интеграл $\int_{t_0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma(s)}\right\} ds < \infty$ для всех $\lambda > 0$. Аналогичные условия в многомерном случае рассматривались в ¹⁶ для задачи о сходимости процессов стохастических аппроксимаций при дополнительных предположениях о поведении решений на бесконечности. В ¹⁷ обсуждались условия полиномиальной устойчивости с вероятностью 1 в терминах существования глобальных

¹⁴ Khasminskii R. Stochastic stability of differential equations. Berlin, Heidelberg : Springer, 2012, §7.4.

¹⁵ Chan T., Williams D. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1989. Vol. 105, № 1. P. 169–176.

¹⁶ Коростелев А.П. Теория вероятн. и ее примен. 1979. Т. 24, № 2. С. 298–316.

¹⁷ Mao X. Quart. J. Math. Oxford (2). 1992. Vol. 43, № 3. P. 339–348.

функций Ляпунова для многомерных стохастических систем с затухающими коэффициентами. В ¹⁸ для классов скалярных стохастических уравнений с сильно нелинейными коэффициентами сноса исследовалось асимптотическое поведение и устойчивость решений, стремящихся к равновесию предельных уравнений, в случае полиномиально затухающих коэффициентов диффузии, не зависящих от состояния системы. Скалярные уравнения рассматривались также в ¹⁹, где при условии диссипативности предельной системы было доказано, что для устойчивости равновесия относительно шума необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) \log t = 0$. При этом, если $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) \log t = \infty$, то все решения возмущённых уравнений оказываются неограниченными с вероятностью единица. Похожие условия встречаются и в ²⁰, где обсуждались глобальная устойчивость, ограниченность и неограниченность решений линейных стохастических уравнений. Условия неограниченности решений для одномерных стохастических уравнений с мультипликативными коэффициентами диффузии обсуждались в ²¹.

Влияние мультипликативных стохастических возмущений с затухающей интенсивностью на бифуркации, перестройки решений и резонансные эффекты в плоских гамильтоновых системах ранее не исследовалось. Эти вопросы рассматриваются в настоящей работе. Предлагаемый подход основан на исследовании устойчивости по вероятности с помощью построения локальных стохастических функций Ляпунова для возмущённых систем при некоторых предположениях о поведении коэффициентов уравнений вблизи исследуемых решений.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является разработка методов исследования качественных и асимптотических свойств решений классов асимптотически автономных систем дифференциальных уравнений, описывающих нелинейные автономные гамильтоновы системы на плоскости под действием детерминированных и стохастических возмущений с затухающей интенсивностью. Исследуются бифуркации в возмущённых системах, условия сохранения и потери устойчивости равновесий по Ляпунову, появление притягивающих и отталкивающих состояний, асимптотические режимы для решений и различные проявления резонансных

¹⁸ Appleby J.A.D., Rodkina A., Schurz H. *Discrete Contin. Dyn. Syst. B.* 2006. Vol. 6, № 4. P. 667–696.

¹⁹ Appleby J.A.D., Gleeson J.P., Rodkina A. *Appl. Anal.* 2009. Vol. 88. P. 579–603.

²⁰ Appleby J.A.D., Cheng J., Rodkina A. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2011. Suppl. P. 79–90.

²¹ Klesov O.I., Tymoshenko O.A. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* 2013. Vol. 41. P. 25–35.

эффектов. Развивается подход, основанный на комбинации метода усреднения и построения функций Ляпунова.

Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи:

1. Исследуются бифуркации, связанные с изменением устойчивости равновесия по Ляпунову и появлением новых притягивающих или отталкивающих состояний, и их зависимость от параметров и структуры возмущений.
2. Изучаются условия сохранения и нарушения бифуркации типа центр-седло под действием возмущений с затухающей интенсивностью.
3. Изучается устойчивость равновесия и асимптотические режимы для решений гамильтоновых систем под действием осциллирующих возмущений с асимптотически постоянной резонансной частотой.
4. Изучаются эффекты типа нелинейный резонанс и появление устойчивых состояний, близких к периодическим, в системах с затухающими возмущениями.
5. Исследуется возникновение и устойчивость резонансных решений с неограниченно растущей амплитудой в нелинейных системах под действием затухающих возмущений с чирпированной частотой.
6. Изучается устойчивость по вероятности динамических систем при постоянно действующих случайных возмущениях типа белого шума на асимптотически больших временных интервалах.
7. Изучаются бифуркации, вызванные шумом и связанные с изменением устойчивости по вероятности равновесия или с появлением новых притягивающих состояний в системах, близких к гамильтоновым.
8. Изучается совместное влияние шума и возмущений с асимптотически постоянной резонансной частотой на устойчивость гамильтоновых систем.
9. Исследуется возникновение резонансных решений с неограниченно растущей амплитудой и их стохастическая устойчивость в системах с затухающими чирпированными возмущениями и белым шумом.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Новизна обоснована тем, что, в отличие от известных результатов для близких задач, в настоящей работе не предполагается ни линейности уравнений, ни гамильтоновой структуры возмущений, ни наличия специальных ограничений на правые части предельных уравнений и возмущения, ни существования заранее заданных функций Ляпунова для возмущённых систем. Основные предположения касаются локального поведения предельной системы в окрестности равновесия и степенного затухания возмущений на бесконечно-

сти по независимой переменной.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер и могут быть использованы при исследовании нелинейных детерминированных и стохастических математических моделей. В частности, развитая теория и разработанные методы применялись в задачах о стабилизации неустойчивых резонансных режимов [6], [10], [11], [16], при исследовании решений возмущённых уравнений Пенлеве [20] и уравнений, описывающих процесс самофокусировки [7], а также при описании резонансных режимов в возмущённых осцилляторах Дуффинга [15], [22], [28].

Методология и методы исследования. В работе применяются и развиваются методы теории обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений, теории устойчивости и асимптотического анализа.

При исследовании устойчивости часто используется метод первого приближения, основанный на анализе собственных значений матрицы системы, линеаризованной на решении. В некоторых случаях по знакам действительных частей собственных значений удаётся сделать выводы об устойчивости или неустойчивости решения в исходных уравнениях. В критических случаях, например, когда собственные значения являются чисто мнимыми, такой метод оказывается неэффективным. Метод первого приближения не работает и при исследовании асимптотически автономных систем. В этих случаях свойство устойчивости зависит от нелинейных членов уравнений, и для исследования применяется метод, связанный с построением функций Ляпунова. Под функцией Ляпунова обычно понимается некоторая вспомогательная функция, производная которой, вычисленная на траекториях возмущённой системы обладает определёнными оценками, позволяющими анализировать устойчивость без нахождения явных формул для решений. В настоящей работе предлагаются конструкции функций Ляпунова для классов асимптотически автономных систем, основанные на методе усреднения и учитывающие специфику затухающих со временем возмущений. Отметим, что близкие идеи использовались в ²² при исследовании задач с малым параметром. Однако эти результаты и подходы не допускают прямого переноса на системы с затухающими возмущениями и не могут быть эффективно использованы в рассматриваемых задачах.

Таким образом, в настоящей работе разрабатывается подход к исследованию

²² Хапаев М.М. Усреднение в теории устойчивости: Исследование резонансных многочастотных систем. М. : Наука, 1986.

дованию качественных и асимптотических свойств решений асимптотически автономных нелинейных систем, близких к гамильтоновым, основанный на комбинации метода усреднения и построения функций Ляпунова. На первом шаге строятся замены переменных, преобразующие и упрощающие уравнения в ведущих членах асимптотического разложения на бесконечности по независимой переменной. Упрощения связаны с усреднением правых частей уравнений по некоторой быстрой переменной. Для различных классов возмущений на роль такой переменной подходит либо переменная угол, либо фаза возмущений. На следующем шаге исследуются модельные уравнения, получаемые из преобразованных путём отбрасывания остаточных членов асимптотики правой части. На уровне модельных уравнений описываются возможные асимптотические режимы для решений и обосновывается их устойчивость или неустойчивость с помощью построения функций Ляпунова или Четаева. На последнем шаге доказывается, что отброшенные слагаемые при выводе модельных уравнений являются несущественными и не влияют на глобальную динамику. В этом случае обоснование проводится путём построения классических и стохастических функций Ляпунова для полных возмущённых уравнений на основе усредняющих преобразований. В задачах со случайными возмущениями предложена последовательная конструкция стохастических функций Ляпунова, позволяющая обосновать устойчивость по вероятности решений на любом полиномиально большом временном интервале.

Положения, выносимые на защиту:

1. Описаны бифуркации в гамильтоновых системах под действием затухающих возмущений. Найдены условия, при которых равновесие системы остаётся нейтрально устойчивым, становится асимптотически устойчивым, либо теряет устойчивость с возникновением устойчивых решений, близких к периодическим. Показана неэффективность метода линеаризации для асимптотически автономных систем.
2. Установлены условия, при которых сохраняется или исчезает бифуркация центр-седло в системах с затухающими возмущениями. Описаны асимптотические режимы для решений и условия их устойчивости при различных значениях бифуркационного параметра предельной системы.
3. Описаны режимы фазового захвата и фазового дрейфа для решений нелинейных систем, возникающих под действием затухающих осциллирующих возмущений с асимптотически постоянной резонансной частотой. Выявлена роль возмущений в смещении границы устойчивости равновесия.

4. Найдены условия существования и устойчивости захвата осциллирующих систем в нелинейный резонанс под действием затухающих возмущений. Выведена модельная система, описывающая усреднённую динамику.
5. Доказано существование и устойчивость резонансных решений с неограниченно растущей энергией в нелинейных системах с затухающими возмущениями с чирпированной частотой. Построена асимптотика для общих резонансных решений на бесконечности по времени. Исследованы резонансные режимы для осциллятора Дуффинга с затухающими возмущениями.
6. Определены классы стохастических возмущений типа белого шума, при которых гарантируется устойчивость по вероятности динамических систем на асимптотически больших временных интервалах и на полуоси. Предложена конструкция стохастических функций Ляпунова на основе локальной функции Ляпунова невозмущённой детерминированной системы.
7. Найдены условия на структуру и параметры шума, при которых равновесие в стохастических системах, близких к гамильтоновым, либо становится асимптотически устойчивым по вероятности, либо теряет устойчивость. Доказана устойчивость по вероятности равновесия на асимптотически больших временных интервалах в некоторых промежуточных случаях.
8. Описаны условия устойчивости по вероятности равновесия в режимах фазового захвата и фазового дрейфа в нелинейных гамильтоновых системах под действием шума и резонансных возмущений. Выведена модельная система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая усреднённую динамику.
9. Найдены условия существования и устойчивости резонансных решений с неограниченно растущей амплитудой и фазой, синхронизированной с чирпированными возмущениями, при наличии белого шума. Определены пороговые значения и их зависимость от параметров возмущений.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов обеспечивается строгими доказательствами на основе фундаментальных положений качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и теории стохастических дифференциальных уравнений.

Результаты работы обсуждались на общегородских семинарах им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, 2016–2026), семинарах по теории вероятностей и случайным процессам УГАТУ (Уфа, 2016–2018), семинаре «Нелинейный анализ» факультета математики Потсдамского университета (Потсдам, 2018), коллокви-

уме Междисциплинарной исследовательской лаборатории им. П.Л. Чебышева СПбГУ (Санкт-Петербург, 2020), семинаре Международной лаборатории динамических систем и приложений ВШЭ (Нижний Новгород, 2026), международной конференции EquaDiff (Лион, 2015), Уфимской международной математической конференции (Уфа, БашГУ, 2016), Международной конференции по теории функций, посвящённой столетию А.Ф. Леонтьева (Уфа, БашГУ, 2017), Международных конференциях «Проблемы математической физики и математическое моделирование» (Москва, МИФИ, 2017, 2018), Международных конференциях по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (DFDE) (Москва, РУДН, 2017, 2022), Международной конференции «Спектральная теория и смежные вопросы» (Уфа, БГПУ, 2018), Международных конференциях «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённых выдающемуся математику И.Г. Петровскому (Москва, МГУ, 2021, 2025), Международной конференции «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвящённой 100-летию со дня рождения академика Е.Ф. Мищенко (Москва, МИАН, 2022), Международных конференциях «Нелинейные уравнения и комплексный анализ» (Р. Башкортостан, 2022, 2023, 2025), Международной Воронежской весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения» (Воронеж, 2023), Всероссийской конференции «Нелинейные дни» (Саратов, СГУ, 2023), IV Конференции математических центров России (Санкт-Петербург, СПбГУ, 2024), Международных научных конференциях «Уфимская осенняя математическая школа» (Уфа, УУНиТ, 2024, 2025), Международной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры», посвящённая 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2024), VIII Международной конференции «Topological methods in dynamics and related topics» (Нижний Новгород, ВШЭ, 2025).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы автором лично в 29 работах [1–29].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные результаты получены лично автором.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 9 глав, заключения и библиографии. В каждой главе выделены параграфы, содержащие постановку задач, формулировку результатов, их доказательства

и примеры. Общий объём диссертации составляет 391 страницу. Библиография включает 285 источников.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цели и задачи работы, обоснована научная новизна результатов и описаны используемые методы.

В первой главе рассматривается система (3) с возмущениями вида

$$g_i(x_1, x_2, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} g_{i,k}(x_1, x_2), \quad t \rightarrow \infty, \quad i \in \{1, 2\}, \quad q \in \mathbb{Z}_+. \quad (5)$$

Предполагается, что предельная гамильтонова система имеет неподвижную точку $(0, 0)$ типа центр, $H(x_1, x_2) = |\mathbf{x}|^2/2 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^3)$ при $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow 0$, и существуют $r_0 > 0$ и $E_0 > 0$ такие, что линии уровня $\{H(x_1, x_2) = E\}$, лежащие в круге $\{|\mathbf{x}| < r_0\}$ при $E \in (0, E_0]$, представляют собой замкнутые кривые на фазовой плоскости (x_1, x_2) . Этим кривым соответствуют периодические решения $(x_1^0(t, E), x_2^0(t, E))$ предельной системы с периодом $T(E) = 2\pi/\omega(E)$, где $\omega(E) \neq 0$ для всех $E \in [0, E_0]$. Значение $E = 0$ соответствует неподвижной точке $(0, 0)$. Предполагается, что $g_1(0, 0, t) \equiv g_2(0, 0, t) \equiv 0$.

Цель главы — описать бифуркации в возмущённой системе, связанные с изменением свойств устойчивости равновесия по Ляпунову и появлением притягивающих или отталкивающих состояний. Предлагаемый метод основан на построении функции Ляпунова, которая используется в качестве новой зависимой переменной.

Теорема 1. Для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ найдется $\tau_0 \geq t_0$ и цепочка обратимых преобразований $(x_1, x_2) \mapsto (E, \varphi) \mapsto (v, \varphi)$,

$$x_i = x_i^0 \left(\frac{\varphi}{\omega(E)}, E \right), \quad i \in \{1, 2\}, \quad v = V_N(E, \varphi, t),$$

где $V_N(E, \varphi, t) = E + \sum_{k=1}^N t^{-\frac{k}{q}} v_k(E, \varphi)$ и $v_k(E, \varphi) - 2\pi$ -периодические функции по φ такие, что для всех $(x_1, x_2) \in \{H(x_1, x_2) \leq E_0\} \cap \{|\mathbf{x}| < r_0\}$ и $t \geq \tau_0$ система (3) приводится к виду

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^N t^{-\frac{k}{q}} \Lambda_k(v) + \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}}), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(v) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Из структуры замены и преобразованных уравнений следует, что устойчивость равновесия $(0, 0)$ зависит от поведения $v(t)$ вблизи нуля и определяется функциями $\Lambda_k(v)$, которые вычисляются через коэффициенты $g_{i,j}(x_1, x_2)$.

Теорема 2. Пусть $n \in [1, N]$ такое, что $\Lambda_k(v) \equiv 0$ для $k < n$ и $\Lambda_n(v) = \lambda_n v + \mathcal{O}(v^2)$ при $v \rightarrow 0$, где $\lambda_n = \text{const} \neq 0$. Тогда равновесие $(0, 0)$ системы (3) устойчиво (неустойчиво), если $\lambda_n < 0$ ($\lambda_n > 0$, $n \leq q$). Более того, если $\lambda_n < 0$ и $n < q$ ($n = q$), равновесие экспоненциально (полиномиально) устойчиво.

В этом случае λ_n можно рассматривать как параметр бифуркации, а значение $\lambda_n = 0$ является критическим.

Теорема 3. Пусть $m, n \in [1, N]$ такие, что $m < n$, $\Lambda_k(v) \equiv 0$ для $k < m$, $\Lambda_m(v) = \gamma_{m,h} v^h + \mathcal{O}(v^{h+1})$, $\Lambda_j(v) = \mathcal{O}(v^h)$, $m \leq j < n$, и $\Lambda_n(v) = \lambda_n v + \mathcal{O}(v^2)$ при $v \rightarrow 0$, где $\gamma_{m,h}, \lambda_n = \text{const} \neq 0$, $h \in \mathbb{Z}$, $h \geq 2$. Тогда, равновесие $(0, 0)$ системы (3) устойчиво (неустойчиво), если $\lambda_n < 0$ и $\gamma_{m,h} < 0$ ($\lambda_n > 0$ и $\gamma_{m,h} > 0$).

- В случае $m < n < q$ равновесие экспоненциально устойчиво при $\lambda_n < 0$ и полиномиально устойчиво при $\lambda_n > 0$ и $\gamma_{m,h} < 0$.
- В случае $m < n = q$ равновесие полиномиально устойчиво при $\lambda_n + \frac{n-m}{q(h-1)} < 0$ или $\lambda_n + \frac{n-m}{q(h-1)} > 0$, $\gamma_{m,h} < 0$.
- В случае $q \leq m < n$ ($m < q < n$) равновесие (полиномиально) устойчиво при $\gamma_{m,h} < 0$.

Таким образом, если главные члены возмущений являются нелинейными, устойчивость равновесия определяется параметрами λ_n и $\gamma_{m,h}$ и зависит от отношения n/q . Если $\lambda_n > 0$, равновесие становится неустойчивым в линеаризованной системе. Однако асимптотическая устойчивость может сохраняться в полной системе из-за нелинейных членов уравнений.

В главе также описываются условия, при которых возмущения приводят к появлению устойчивых или неустойчивых режимов, близких к периодическим: $H(x_1(t), x_2(t)) \approx V_c$ с некоторой постоянной $V_c \in (0, E_0)$.

В § 1.4 приводятся условия на возмущения $g_i(x_1, x_2, t)$, при которых гарантируется применимость описанных выше результатов. Примеры обсуждаются в § 1.5, где, в частности, демонстрируется неэффективность линейного анализа устойчивости для асимптотически автономных систем.

Результаты главы опубликованы в [18]. Связанные результаты, о роли функций Ляпунова при исследовании асимптотики решений на далеких временах опубликованы в [7] и [14].

Во второй главе исследуется влияние возмущений на автономные системы с бифуркацией центр-седло. Предполагается, что гамильтониан предельной системы зависит от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ и имеет вид $H(x_1, x_2) = x_2^2/2 + V(x_1; \lambda)$, где $\partial_x V(x; \lambda) = (x^2 - \lambda)w(x)$ и $w(x) > 0$ для всех $|x| \leq r_0$. Исследуется влияние возмущений (5) на асимптотические режимы в системе (3) и их устойчивость при различных значениях параметра λ . Предполагается, что существует $n \leq q$ такое, что $g_{i,j}(x_1, x_2) \equiv 0$ при всех $i \in \{1, 2\}$ и $j < n$.

Если $\lambda > 0$, то для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ существуют функции $\xi_I^N(t) \equiv \sigma + \sum_{k=n}^{n+N} t^{-\frac{k}{q}} \xi_k$, $\eta_I^N(t) \equiv \sum_{k=n}^{n+N} t^{-\frac{k}{q}} \eta_k$ с $\sigma = \pm\sqrt{\lambda}$ и постоянными коэффициентами ξ_k, η_k , подстановка которых в систему (3) даёт невязки $\Xi_I(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n+N+1}{q}})$, $\Theta_I(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n+N+1}{q}})$ при $t \rightarrow \infty$. При $\lambda = 0$ вид асимптотических решений существенно зависит от структуры возмущений. Пусть $m < n$ такое, что $g_{2,n+m}(0, 0) > 0$ и $g_{2,n+l}(0, 0) = 0$ для всех $l < m$. Тогда для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ существуют функции $\xi_{II}^N(t) \equiv \sum_{k=n+m}^{n+m+N} t^{-\frac{k}{2q}} \xi_k$, $\eta_{II}^N(t) \equiv \sum_{k=2n}^{2n+N} t^{-\frac{k}{2q}} \eta_k$ с $\xi_{n+m} = \pm\mu$, $\mu = \sqrt{g_{2,n+m}(0, 0)/w(0)}$ и постоянными коэффициентами ξ_k, η_k , подстановка которых в систему (3) даёт невязки $\Xi_{II}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{2n+N+1}{2q}})$, $\Theta_{II}(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{n+m+N+1}{2q}})$ при $t \rightarrow \infty$. Доказывается, что при определённых условиях существуют решения возмущённой системы с соответствующей асимптотикой на бесконечности. При этом некоторые из этих асимптотических решений оказываются неустойчивыми: траектории покидают любую сколь угодно малую их окрестность. В частности, с помощью метода линеаризации и построения функций Четаева обосновываются следующие утверждения:

Теорема 4. Пусть $\lambda > 0$. Тогда для любого $N \geq 1$ асимптотический режим $\xi_I^N(t), \eta_I^N(t)$ с $\sigma = -\sqrt{\lambda}$ является неустойчивым.

Теорема 5. Пусть $\lambda = 0$ и $g_{2,n+m}(0, 0) > 0$. Тогда для любого $N \geq n + m$ асимптотический режим $\xi_{II}^N(t), \eta_{II}^N(t)$ с $\xi_{n+m} = -\mu$ является неустойчивым.

Для функций $\xi_I^N(t) = \sqrt{\lambda} + \mathcal{O}(t^{-n/q})$ и $\xi_{II}^N(t) = \mu t^{-(n+m)/2q}(1 + \mathcal{O}(t^{-n/q}))$ корни $e_{\pm}(t)$ характеристического уравнения линеаризованной системы оказываются комплексными, причём $\Re e_{\pm}(t) = \mathcal{O}(t^{-n/q})$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, построенные функции соответствуют неподвижной точке типа центр в асимптотическом пределе, и метод линеаризации оказывается неэффективным. В

этом случае для анализа устойчивости применяется метод функций Ляпунова при дополнительных предположениях на возмущения. Например, пусть существует $h \in [0, n)$ такое, что $\sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} g_{i,k}(x_1, x_2) \equiv 0$ для всех $k < n + h$. Определим $\gamma_{n+h}(\lambda) := \sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} g_{i,n+h}(\sqrt{\lambda}, 0)$ и $\alpha_{n,m} := \gamma_{n+h}(0) + \delta_{n+h,q} \frac{5(n+m)}{4q}$.

Теорема 6. *Если $\lambda > 0$, то для любого $N \geq h$ асимптотический режим $\xi_I^N(t), \eta_I^N(t)$ с $\sigma = \sqrt{\lambda}$ является устойчивым (неустойчивым) при $\gamma_{n+h}(\lambda) < 0$ ($\gamma_{n+h}(\lambda) > 0$ и $n + h \leq q$). Более того, если $\gamma_{n+h}(\lambda) < 0$ и $n + h < q$, то существует асимптотически устойчивое решение системы (3) с асимптотикой $\xi_I^N(t), \eta_I^N(t), \sigma = \sqrt{\lambda}$ при $t \rightarrow \infty$.*

Теорема 7. *Если $\lambda = 0$ и $g_{2,n+m}(0, 0) > 0$, то для любого $N \geq (5n + m + 4h - 1)/2$ асимптотический режим $\xi_{II}^N(t), \eta_{II}^N(t)$ с $\xi_{n+m} = \mu$ является устойчивым (неустойчивым) при $\alpha_{n,m} < 0$ ($\alpha_{n,m} > \delta_{n+h,q} 3(n+m)/(2q)$ и $n + h \leq q$). Более того, если $\alpha_{n,m} < 0$ и $n + h < q$, то существует асимптотически устойчивое решение системы (3) с асимптотикой $\xi_{II}^N(t), \eta_{II}^N(t), \xi_{n+m} = \mu$ при $t \rightarrow \infty$.*

Если $g_{2,n+m}(0, 0) < 0$, асимптотическое решение в виде степенных рядов не строится. Показывается, что в этом случае траектории возмущённой системы ведут себя как решения предельной системы с $\lambda < 0$ и покидают окрестность точки $(0, 0)$. Это указывает на сохранение соответствующей бифуркации. Похожий анализ проводится в случае $g_{2,n+m}(0, 0) = 0$ при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты возмущений более высокого порядка.

Результаты главы опубликованы в [16]. Связанные результаты о неавтономных бифуркациях и асимптотических режимах в различных моделях опубликованы в [1, 6, 10, 11, 26].

В третьей главе исследуется устойчивость равновесия гамильтоновых систем под действием осциллирующих возмущений с асимптотически постоянной резонансной частотой. Рассматривается система (3) с

$$g_i(x_1, x_2, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} g_{i,k}(x_1, x_2, S(t)), \quad t \rightarrow \infty, \quad i \in \{1, 2\}, \quad q \in \mathbb{Z}_+, \quad (6)$$

$$S(t) \equiv \sum_{k=0}^{q-1} s_k t^{1-\frac{k}{q}} + s_q \log t, \quad s_0 > 0, \quad s_k = \text{const}. \quad (7)$$

Предполагается, что коэффициенты $g_{i,k}$ являются 2π -периодическими относительно S , сохраняют неподвижную точку $(0, 0)$ и выполняется условие резонанса $s_0 = \varkappa \omega(0)$ с некоторым $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$.

Численный анализ примеров показывает, что такие возмущения могут приводить к изменению границ устойчивости за счёт эффектов типа параметрического резонанса. Цель главы — описать условия устойчивости системы (3) и выявить роль возмущений (6) в соответствующих локальных бифуркациях.

На первом шаге выводится усреднённая система.

Теорема 8. Для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ найдутся $l \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, $\tau_0 \geq t_0$, $\Delta_0 > 0$ и цепочка обратимых преобразований $(x_1, x_2) \rightarrow (E, \varphi) \rightarrow (\mathcal{E}, \theta) \rightarrow (v, \psi)$,

$$x_i = x_i^0 \left(\frac{\varphi}{\omega(E)}, E \right), \quad i \in \{1, 2\}, \quad E = t^{-\frac{l}{q}} \mathcal{E}, \quad \varphi = \varkappa^{-1} S(t) + \theta,$$

$$v = \mathcal{E} + \sum_{k=2}^N t^{-\frac{k}{2q}} v_k(\mathcal{E}, \theta, S(t)), \quad \psi = \theta + \sum_{k=2}^N t^{-\frac{k}{2q}} \psi_k(\mathcal{E}, \theta, S(t))$$

где $v_k(\mathcal{E}, \theta, S)$, $\psi_k(\mathcal{E}, \theta, S)$ — 2π -периодические по θ и $2\pi\varkappa$ -периодические по S , такие, что для всех $(x_1, x_2) \in \{H(x_1, x_2) \leq E_0\} \cap \{|\mathbf{x}| < r_0\}$ и $t \geq \tau_0$ система (3) приводится к виду

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k=2}^N t^{-\frac{k}{2q}} \Lambda_k(v, \psi) + \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{2q}}), \quad \frac{d\psi}{dt} = \sum_{k=2}^N t^{-\frac{k}{2q}} \Omega_k(v, \psi) + \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{2q}}) \quad (8)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно для всех $v \in [0, \Delta_0]$ и $\psi \in \mathbb{R}$, где $\Lambda_k(v, \psi)$ и $\Omega_k(v, \psi)$ — 2π -периодические по ψ , причём $\Lambda_k(v, \psi) = \mathcal{O}(v)$, $\Omega_k(v, \psi) = \mathcal{O}(1)$ при $v \rightarrow 0$ равномерно для всех $\psi \in \mathbb{R}$.

Пусть $2 \leq n, m \leq 2q$ — наименьшие целые числа такие, что $\Lambda_n(v, \psi) \not\equiv 0$ и $\Omega_m(v, \psi) \not\equiv 0$. Рассмотрим два случая:

$$\exists \psi_* \in \mathbb{R} : \quad \Omega_m(0, \psi_*) = 0, \quad \partial_\psi \Omega_m(0, \psi_*) < 0; \quad (9)$$

$$\exists \Delta_* \in (0, \Delta_0] : \quad \Omega_m(v, \psi) \neq 0 \quad \forall v \in [0, \Delta_*], \quad \psi \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Лемма 1. Если выполнено (9), то система (8) имеет частное решение $v(t) \equiv 0$, $\psi(t) \equiv \hat{\psi}(t)$ такое, что $\hat{\psi}(t) = \psi_* + o(1)$ при $t \rightarrow \infty$. Если выполнено (10), то $|\psi(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ для решений (8) с $v(t) \in [0, \Delta_*]$ при $t \geq \tau_0$.

Таким образом, система допускает по крайней мере два асимптотических режима с $v(t)$ вблизи нуля. Один класс решений имеет разность фаз $\psi(t)$, стремящуюся к константе на бесконечности, а другой — неограниченно растущую разность фаз: $|\psi(t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Случай (9) соответствует фазовому захвату, а (10) связан с фазовым дрейфом. В обоих случаях

устойчивость равновесия $(0, 0)$ системы (3) определяется первым уравнением в (8). Обсуждается устойчивость каждого асимптотического режима при дополнительных предположениях о структуре уравнений (8). В частности, пусть $\Lambda_n(v, \psi) \equiv v(\lambda_n(\psi) + \delta_{n,2q}l/q + \tilde{\lambda}_n(v, \psi))$ и $\tilde{\lambda}_n(v, \psi) = o(1)$ при $v \rightarrow 0$. Тогда справедливы

Теорема 9. Пусть выполнено (9). Тогда равновесие $(0, 0)$

- экспоненциально устойчиво, если $n, m < 2q$ и $\lambda_n(\psi_*) < 0$;
- полиномиально устойчиво, если либо $n < m = 2q$, $\lambda_n(\psi_*) < 0$, либо $m \leq n = 2q$, $\lambda_n(\psi_*) + l/q < 0$;
- неустойчиво, если $\lambda_n(\psi_*) + \tilde{\lambda}_n(v, \psi_*) > 0$ для всех $v \in [0, \Delta_0]$.

Теорема 10. Пусть выполнено (10). Тогда равновесие $(0, 0)$

- экспоненциально устойчиво, если $n < 2q$ и $\lambda_n(\psi) < 0$ для всех $\psi \in \mathbb{R}$.
- полиномиально устойчиво, если $n = 2q$ и $\lambda_n(\psi) + l/q < 0$ для всех $\psi \in \mathbb{R}$.
- неустойчиво, если $\lambda_n(\psi) > 0$, $\tilde{\lambda}_n(v, \psi) \geq 0$ для всех $v \in [0, \Delta_0]$ и $\psi \in \mathbb{R}$.

Более сложные условия устойчивости появляются, когда $\Lambda_n(v, \psi)$ нелинейна относительно v или $\lambda_n(\psi)$ меняет знак в режиме фазового дрейфа.

Результаты главы опубликованы в [15]. Связанные результаты о влиянии осциллирующих возмущений, не сохраняющих равновесие предельной системы, опубликованы в [25]. Поведение вдали от резонанса исследовалось в [13]. Асимптотический анализ возмущённых уравнений содержится в [21].

В четвертой главе рассматриваются осциллирующие возмущения с асимптотически постоянной частотой, но, в отличие от предыдущей главы, здесь исследуются решения вдали от равновесия и резонансные эффекты, приводящие к появлению устойчивых состояний, близких к периодическим. Похожие эффекты в задачах с малым параметром обычно связывают с нелинейным резонансом.

Возмущённая система рассматривается в виде

$$\frac{dr}{dt} = g_1(r, \varphi, S(t), t), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(r) + g_2(r, \varphi, S(t), t), \quad (11)$$

где функции $\omega(r) > 0$, $g_i(r, \varphi, S, t)$ определены для всех $0 < |r| \leq \mathcal{R}$, $(\varphi, S) \in \mathbb{R}^2$, $t \geq t_0$ и являются 2π -периодическими по φ и S , $g_i \sim \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\frac{k}{q}} g_{i,k}(r, \varphi, S)$ при $t \rightarrow \infty$. Функции $g_i(r, \varphi, S, t)$ играют роль возмущений автономной системы $d\hat{r}/dt = 0$, $d\hat{\varphi}/dt = \omega(\hat{r})$, описывающей неизохронные колебания. Фа-

за возмущений рассматривается в виде (7). Предполагается, что существуют $0 < |a| < \mathcal{R}$ и взаимно простые целые числа $\kappa, \varkappa \in \mathbb{Z}_+$, такие, что $\eta := \omega'(a) \neq 0$ и выполняется условие резонанса $\kappa s_0 = \varkappa \omega(a)$.

В качестве примера рассмотрим возмущённое уравнение Дуффинга:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - \vartheta x^3 = t^{-\frac{1}{2}} \left((\alpha_0 + \alpha_1 \sin S(t))x + \beta_0 \frac{dx}{dt} \right), \quad S(t) \equiv \frac{3t}{2} \quad (12)$$

с параметрами $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ и $\vartheta > 0$. Нетрудно проверить, что с помощью эллиптических функций Якоби система сводится к (11). Численный анализ показывает (рис. 1, а), что при отсутствии осцилляций в возмущениях ($\alpha_1 = 0$) амплитуда решений может стремиться к нулю или к бесконечности в зависимости от знака β_0 . В системе с осциллирующими возмущениями такое поведение может либо сохраниться (рис. 1, б), либо нарушиться с появлением решений, близких к постоянным (рис. 1, в). Цель главы — определить условия, гарантирующие существование и устойчивость таких состояний в системах вида (11).

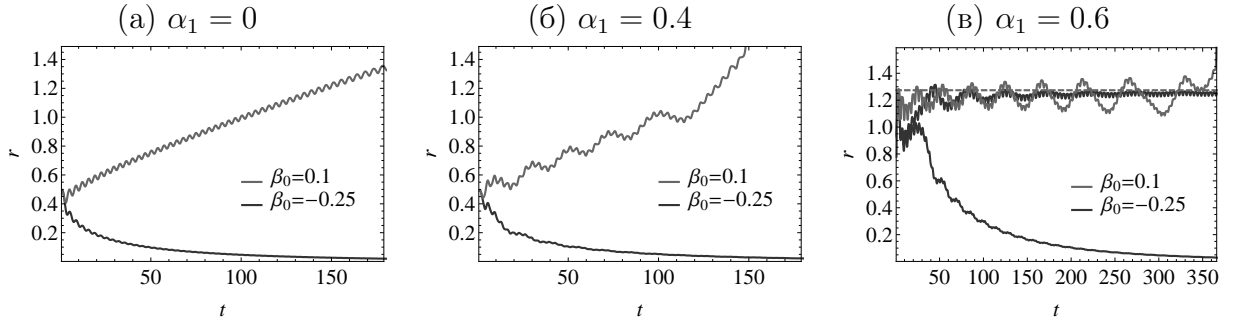


Рис. 1. Эволюция $r(t) = \sqrt{2U(x(t)) + (x'(t))^2}$ для системы (12) при $\vartheta = 1/4$, $\alpha_0 = 0.5$ и различных значениях параметров α_1, β_0 . Пунктирная кривая соответствует $r(t) \equiv 1.27$.

На первом шаге выводится усреднённая система.

Теорема 11. Для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ найдутся $\tau_0 \geq t_0$, $1 \leq n, m \leq N$ и цепочка преобразований $(r, \varphi) \mapsto (R, \Psi) \mapsto (\rho, \psi)$, $r = a + t^{-\frac{1}{2q}}R$, $\varphi = \kappa S(t)/\varkappa + \Psi$, $R = \rho + \sum_{k=1}^N v_k(\rho, \psi, S(t), t)$, $\Psi = \psi + \sum_{k=1}^N u_k(\rho, \psi, S(t), t)$, такие, что для всех $0 < |r| < \mathcal{R}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $t \geq \tau_0$ система (11) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \sum_{k=n}^N t^{-\frac{k}{2q}} \Lambda_k(\rho, \psi) + \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{2q}}), \\ \frac{d\psi}{dt} &= t^{-\frac{1}{2q}} \eta \rho + \sum_{k=m}^N t^{-\frac{k}{2q}} \Omega_k(\rho, \psi) + \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{2q}}), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Lambda_k(\rho, \psi)$ и $\Omega_k(\rho, \psi)$ — 2π -периодические по ψ и полиномы по переменной ρ степени $k - 1$ и k соответственно.

Предлагаемый метод основан на изучении модельной системы, полученной из (13) путём отбрасывания остаточных членов. Сначала исследуются решения усеченной системы. Затем доказываются, что траектории полной системы ведут себя аналогично. Качественные свойства решений усечённых уравнений зависят от наличия и устойчивости неподвижных точек в системе

$$t^{\frac{n}{2q}} \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \Lambda_n(\hat{\rho}, \hat{\phi}), \quad t^{\frac{1}{2q}} \frac{d\hat{\phi}}{dt} = \eta \hat{\rho}. \quad (14)$$

Пусть существует $\psi_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $\Lambda_n(0, \psi_0) = 0$ и $\nu_n := \partial_\psi \Lambda_n(0, \psi_0) \neq 0$. Определим $\lambda_n := \partial_\rho \Lambda_n(0, \psi_0)$. Тогда справедлива

Лемма 2. Если $\nu_n \eta < 0$ и $\lambda_n < 0$ ($\nu_n \eta > 0$ или $\nu_n \eta < 0$, $\lambda_n > 0$, $n \leq q$), то равновесие $(0, \psi_0)$ системы (14) асимптотически устойчиво (неустойчиво).

При $\nu_n \eta > 0$ равновесие $(0, \psi_0)$ имеет седловой тип. В этом случае похожая динамика имеет место и в полной системе. При $\nu_n \eta < 0$ неподвижная точка, в зависимости от знака дивергенции векторного поля в равновесии, может быть как устойчивой, так и неустойчивой. Определим $l = \min\{m, n\}$ и $d_k(\rho, \psi) := \partial_\rho \Lambda_k(\rho, \psi) + \partial_\psi \Omega_k(\rho, \psi)$. Тогда справедлива

Лемма 3. Пусть $\nu_n \eta < 0$ и существует $h \in (l, 2q]$ такое, что $d_k(\rho, \psi) \equiv 0$ при $k \leq h - 1$ и $d_h(0, \psi_0) < 0$. Тогда модельная система имеет устойчивое частное решение $\varrho_*(t) \rightarrow 0$, $\phi_*(t) \rightarrow \psi_*$ при $t \rightarrow \infty$. Более того, решение $\varrho_*(t)$, $\phi_*(t)$ асимптотически устойчиво, если $h + n - 1 < 2q$.

Показывается, что в этом случае в системе (11) имеет место устойчивый режим фазового захвата и существует двухпараметрическое семейство решений с асимптотикой $r(t) = a + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})$ и $\varphi(t) = \kappa S(t)/\varkappa + \psi_0 + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2q}})$ при $t \rightarrow \infty$. Если $d_h(0, \psi_0) > 0$, то соответствующий режим оказывается неустойчивым.

Если $\Lambda_n(\rho, \psi) \neq 0$, то фаза системы (11) может существенно отличаться от $\kappa S(t)/\varkappa$, и решения с $r(t) \approx a$ не возникают. Это условие определяет пороговые значения для захвата в нелинейный резонанс.

Результаты главы опубликованы в [29]. Связанные результаты о резонансных эффектах в изохронных системах опубликованы в [23] и [27].

В пятой главе исследуется система (3) с $H(x_1, x_2) = x_2^2/2 + x_1^{2h}/(2h) + P_h(x_1)$ и возмущениями (4), где $g_{i,k}(x_1, x_2, S) \equiv 0$ при $k < a$, $S(t) = st^{1+b/q}$.

Здесь $a, b, h \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq a, b \leq q$, $s > 0$, $h \geq 2$ и $P_h(x)$ — многочлен степени не выше $2h - 1$. Предполагается, что $g_{i,k}(x_1, x_2, S)$ являются многочленами степени не выше p с периодическими по S коэффициентами. Обозначим через $l \leq p$ максимальную степень x_2 в g_2 .

В качестве примера рассмотрим уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x + x^3 = Bt^{-\frac{1}{3}} \cos\left(st^{\frac{4}{3}}\right). \quad (15)$$

В этом случае $a = b = 1$, $q = 3$, $h = 2$, $P_2 \equiv g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv t^{-1/q}B \cos S$, $l = p = 0$. Численный анализ показывает, что такие возмущения могут приводить к появлению решений с неограниченно растущей энергией $I(t) \equiv H(x(t), \dot{x}(t))$, а также сохранять ограниченные решения $I(t) = \mathcal{O}(1)$ при $t \rightarrow \infty$ (рис. 2). Цель главы — определить условия существования и устойчивости резонансных решений с неограниченно растущей энергией в системах вида (3) и описать их асимптотику на далеких временах.

Заметим, что существует $E_0 > 0$ такое, что линии уровня $\{H(x_1, x_2) = E\}$ при $E > E_0$ являются замкнутыми кривыми, которым соответствуют решения $(x_1^0(t, E), x_2^0(t, E))$ предельной системы с периодом $T(E)$. Показывается, что $\omega(E) \equiv 2\pi/T(E) = \omega_0 E^{\frac{h-1}{2h}}(1 + \mathcal{O}(E^{-\frac{1}{h}}))$ при $E \rightarrow \infty$, где $\omega_0 = 2\pi/\kappa$ и $\kappa = \sqrt{2}(2h)^{\frac{1}{2h}} \int_{-1}^1 (1 - \zeta^{2h})^{-\frac{1}{2}} d\zeta$. Пусть $I_{\varkappa}(t)$ — решение резонансного уравнения $\omega(I) \equiv \varkappa^{-1}S'(t)$. Тогда $I_{\varkappa}(t) \sim c_{\varkappa}^{-2h} t^{\frac{2hb}{(h-1)q}}$ при $t \rightarrow \infty$, где $c_{\varkappa} = (\omega_0 \varkappa / \vartheta)^{\frac{1}{h-1}}$ и $\vartheta = s(1 + b/q) > 0$. Доказывается, что необходимым условием существования резонансных решений в возмущённой системе является $-1 \leq \sigma < b/q$, где $\sigma := \frac{b}{q}(l - 1 + \frac{p-1}{h-1}) - \frac{a}{q}$. Определим $\mu = (b/q - \sigma)/2$, $\nu = 1 + 2\mu + \sigma$, $M = 2\mu q(h - 1)$, $N = 2\nu q(h - 1)$ и $\mathcal{D}(E_0) = \{H(x_1, x_2) > E_0\}$. Справедлива

Теорема 12. Для любых $n > 0$ и $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$ найдутся $t_1 \geq t_0$, $E_1 \geq E_0$, $0 \leq L \leq n$ и цепочка преобразований $(x_1, x_2, t) \rightarrow (E, \phi, t) \rightarrow (r, \theta, \tau) \rightarrow (R, \Psi, \tau)$,

$$x_i = x_i^0\left(\frac{\phi}{\omega(E)}, E\right), \quad i \in \{1, 2\},$$

$$E(t) = I_{\varkappa}(t)(1 + t^{-\mu}r(\tau))^{2h}, \quad \phi(t) = \theta(\tau) + \varkappa^{-1}S(t), \quad \tau = \frac{t^\nu}{\nu},$$

$$R = r + \sum_{K=0}^n \tau^{-\frac{M+K}{N}} \rho_K(r, \theta, \zeta(\tau)), \quad \Psi = \theta + \sum_{K=0}^n \tau^{-\frac{M+K}{N}} \psi_K(r, \theta, \zeta(\tau)),$$

где $\zeta(\tau) \equiv S((\nu\tau)^{1/\nu})$, $\rho_k(r, \theta, \zeta)$, $\psi_k(r, \theta, \zeta)$ — периодические по θ и ζ , такие,

что для всех $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}(E_1)$ и $t \geq t_1$ система (3) приводится к виду

$$\begin{aligned}\tau^{\frac{M}{N}} \frac{dR}{d\tau} &= \sum_{K=L}^n \tau^{-\frac{K}{N}} \Lambda_K(R, \Psi) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{n+1}{N}}), \\ \tau^{\frac{M}{N}} \frac{d\Psi}{d\tau} &= \sum_{K=0}^n \tau^{-\frac{K}{N}} \Omega_K(R, \Psi) + \mathcal{O}(\tau^{-\frac{n+1}{N}}),\end{aligned}$$

где коэффициенты $\Lambda_K(R, \Psi)$, $\Omega_K(R, \Psi)$ являются 2π -периодическими по Ψ . Если $K \in [0, M)$, то $\Lambda_K \equiv \Lambda_K^0(\varphi)$, $\Omega_K \equiv \mathcal{Q}_K^0 \rho$, $\mathcal{Q}_K^0 = \text{const}$, $\mathcal{Q}_0^0 \neq 0$, $\Lambda_{M+K} = \Lambda_{M+K}^0(\varphi) + \mathcal{O}(\rho)$, $\Omega_{M+K} = \Omega_{M+K}^0(\varphi) + \mathcal{O}(\rho)$, $\rho \rightarrow 0$ равномерно для всех $\varphi \in \mathbb{R}$.

Таким образом, наличие резонансных решений исходной системы зависит от свойств решений преобразованной системы с $R(\tau) \approx 0$ и $\Psi(\tau) \approx \varphi_0$, где $\Lambda_L(0, \varphi_0) = 0$. Пусть $0 \leq L \leq \min\{N - M, 2M - 1\}$, и параметр $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ такой, что $\Lambda_L^0(\varphi_0) = 0$ и $\lambda_L := \partial_\Psi \Lambda_L^0(\varphi_0) \neq 0$.

Заметим, что усреднённая система является гамильтоновой в первых членах асимптотического разложения при $K \in [0, M)$. Пусть существует $D \geq M$: $\partial_R \Lambda_K(R, \Psi) + \partial_\Psi \Omega_K(R, \Psi) \equiv 0$ при $K < D$ и $\gamma_D := \partial_R \Lambda_D(0, \varphi_0) + \partial_\Psi \Omega_D(0, \varphi_0) \neq 0$. Определим $\hat{\gamma}_D := \gamma_D + \delta_{M+D, N} L/N$. Тогда справедлива

Теорема 13. Пусть $\lambda_L < 0$, $\hat{\gamma}_D < 0$ и $M + D \leq N$. Тогда найдутся $t_s > 0$ и $\mathcal{D}_s \subset \mathcal{D}(E_0)$ такие, что для всех $(x_1^s, x_2^s) \in \mathcal{D}_s$ решение $(x_1(t), x_2(t))$ системы (3) с начальными данными $x_1(t_s) = x_1^s$, $x_2(t_s) = x_2^s$ имеет следующие оценки при $t \rightarrow \infty$: $x_1(t) = t^{\frac{b}{(h-1)q}} c_\varkappa^{-1} X_1(\varphi_0 + \varkappa^{-1} S(t)) (1 + o(1))$, $x_2(t) = t^{\frac{hb}{(h-1)q}} c_\varkappa^{-h} X_2(\varphi_0 + \varkappa^{-1} S(t)) (1 + o(1))$, где $(X_1(\phi), X_2(\phi))$ — 2π -периодическое решение системы $\omega_0 \frac{dX_1}{d\phi} = X_2$, $\omega_0 \frac{dX_2}{d\phi} = -X_1^{2h-1}$, $X_1(0) = (2h)^{\frac{1}{2h}}$, $X_2(0) = 0$.

В § 5.4 теория применяется к осциллятору Дуффинга.

Результаты главы опубликованы в [22]. Случай $b/q \geq 1$ разобран в [19].

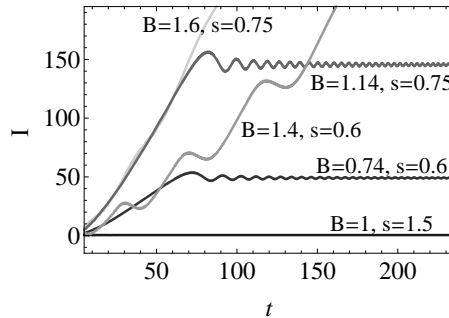


Рис. 2. Эволюция $I(t)$ для уравнения (15) при вариации B , s и начальных данных.

В шестой главе исследуется влияние постоянно действующих случайных возмущений типа белого шума на локально устойчивые системы. Рассматривается неавтономная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{z}, t), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^\ell, \quad t \geq t_0 \quad (16)$$

с неподвижной точкой $\mathbf{z} = 0$: $\mathbf{a}(0, t) \equiv 0$. Предполагается, что существует функция Ляпунова $V(\mathbf{z}, t)$, обладающая оценками $|\mathbf{z}|^2 \leq V(\mathbf{z}, t) \leq C_0|\mathbf{z}|^2$, $|\partial_{\mathbf{z}}V(\mathbf{z}, t)|^2 \leq C_1|\mathbf{z}|^2$, $|\partial_{z_i}\partial_{z_j}V(\mathbf{z}, t)| \leq C_2$, $dV/dt \leq -\gamma t^{-\alpha}V$ для всех $|\mathbf{z}| \leq r_0$ и $t \geq t_0$ с параметрами $\gamma, r_0, C_i > 0$ и $\alpha \geq 0$. Наличие такой функции Ляпунова гарантирует (локальную) устойчивость тривиального решения при $t \geq t_0$. Если $0 \leq \alpha \leq 1$, то имеет место асимптотическая устойчивость. Возмущённая система рассматривается в форме стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), t) dt + \mu \mathbf{G}(\mathbf{x}(t), t) d\mathbf{w}(t), \quad t > t_0, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^\ell, \quad (17)$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ — гладкая матрица размерности $\ell \times \ell$ такая, что $\mathbf{G}(0, t) \neq 0$. В этом случае с вероятностью единица траектории системы (17) покидают окрестность равновесия невозмущённой системы, и устойчивость сохраняется лишь для достаточного узкого класса систем. Поэтому имеет смысл рассматривать задачу об устойчивости на конечном временном интервале. Один из вариантов такого подхода состоит в нахождении ограничений на $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ и как можно большего временного отрезка, на котором решения возмущённых уравнений остаются вблизи равновесия детерминированной системы.

Для любого $\beta \geq 0$ и $h > 0$ определим \mathcal{P}_β^h как множество матриц $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$, для которых $\sup_{|\mathbf{x}| \leq r_0, t \geq t_0} \left\{ \|\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)\| t^{\frac{\beta}{2}} \right\} < h$.

Определение 1. Решение $\mathbf{z}(t) \equiv 0$ системы (16) устойчиво по вероятности относительно белого шума при $t_0 \leq t \leq t_0 + T_\mu$ равномерно по $\mathbf{G} \in \mathcal{P}$, если $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ существуют $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что для всех $|\mathbf{x}_0| < \delta_1$, $\mu < \delta_2$, $\mathbf{G} \in \mathcal{P}$ решение $\mathbf{x}(t)$ системы (17) с начальными данными $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ удовлетворяет неравенству: $\mathbb{P}(\sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + T_\mu} |\mathbf{x}(t)| \geq \varepsilon_1) \leq \varepsilon_2$.

Теорема 14. Пусть $\gamma > 0$ и $\alpha \geq 0$. Тогда для любых $N \in \mathbb{Z}_+$, $h > 0$ и $0 < \varkappa < 1$ решение $\mathbf{z}(t) \equiv 0$ системы (16) устойчиво по вероятности относительно белого шума при $t_0 \leq t \leq t_0 + \mu^{-2N+\varkappa}$ равномерно по $\mathbf{G} \in \mathcal{P}_\alpha^h$.

Если $\gamma = 0$, то тривиальное решение системы (16) устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически устойчиво. В этом случае величину T_μ можно увеличить за счёт затухания коэффициентов матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$.

Теорема 15. Пусть $\gamma \geq 0$ и $\alpha \geq 0$. Тогда для любых $h > 0$, $0 < \varkappa < 1$ и $\beta > 1$ решение $\mathbf{z}(t) \equiv 0$ системы (16) устойчиво по вероятности относительно белого шума при $t_0 \leq t \leq t_0 \exp(\mu^{-2+\varkappa})$ равномерно по $\mathbf{G} \in \mathcal{P}_1^h$ и при всех $t \geq t_0$ равномерно по $\mathbf{G} \in \mathcal{P}_\beta^h$.

Результаты главы опубликованы в [5]. В [4] и [9] рассматривались иные предположения на функцию Ляпунова $V(\mathbf{z}, t)$ для детерминированной системы, которые гарантируют либо локальную экспоненциальную устойчивость равновесия, либо локальную асимптотическую устойчивость по части переменных. Результаты о потраекторной устойчивости динамических систем с вероятностью единица относительно стохастических возмущений опубликованы в [8] для аддитивного шума и в [12] для мультипликативного шума. Близкие результаты об устойчивости динамических систем относительно случайных возмущений, малых в среднем, содержатся в [2] и [3].

В седьмой главе исследуется влияние мультипликативных стохастических возмущений типа белого шума на бифуркации в асимптотически автономных системах, описанных в первой главе. Возмущённая система рассматривается в виде (17) с $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv (\partial_{x_2} H(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2, t), -\partial_{x_1} H(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2, t))^T$, $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \{G_{i,j}(x_1, x_2, t)\}_{2 \times 2}$ при условиях $\mathbf{a}(0, t) \equiv 0$, $\mathbf{G}(0, t) \equiv 0$. Предполагается, что $H(x_1, x_2) = |\mathbf{x}|^2/2 + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^3)$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$, а функции $g_i(x_1, x_2, t)$ и $G_{i,j}(x_1, x_2, t)$ имеют асимптотические разложения (5) при $t \rightarrow \infty$. Цель главы — описать условия устойчивости возмущённой системы и выявить роль возмущений в соответствующих локальных бифуркациях.

В качестве примера рассмотрим линейную систему

$$dx_1 = x_2 dt, \quad dx_2 = (-x_1 + t^{-1} \lambda x_2) dt + \mu t^{-\frac{1}{2}} x_1 dw_2(t), \quad t > 1 \quad (18)$$

с параметрами λ и μ . Численный анализ показывает, что стохастические возмущения могут приводить к смещению границы устойчивости равновесия $(0, 0)$: устойчивость изменяется при переходе λ через некоторое критическое значение $\lambda_*(\mu)$ такое, что $\lambda_*(0) = 0$ (рис. 3). В общем случае необходимо учитывать влияние нелинейных членов уравнений с убывающими коэффициентами.

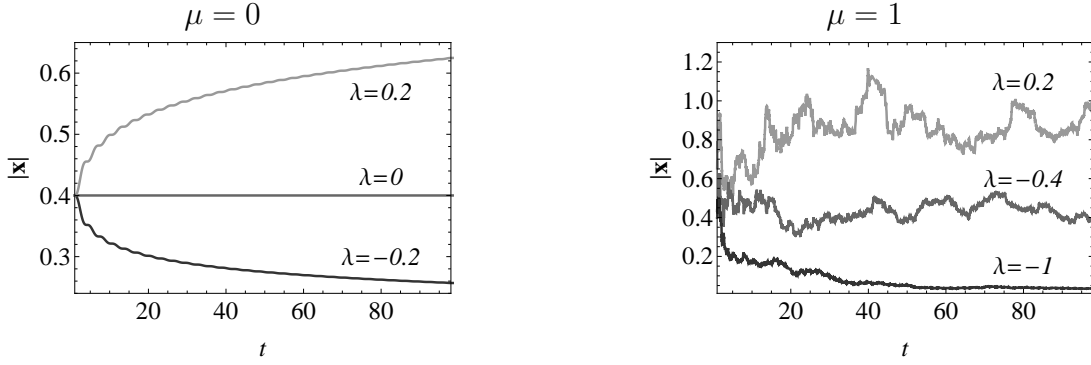


Рис. 3. Эволюция $|\mathbf{x}(t)|$ для реализаций решений системы (18) с $x_1(1) = 0.4$, $x_2(1) = 0$.

В главе доказывается, что для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ существует $n \in [1, N]$ и цепочка преобразований, которая приводит возмущённую систему к виду

$$dv = \left(\sum_{k=n}^N t^{-\frac{k}{q}} \Lambda_k(v) + \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}}) \right) dt + \mu \sum_{j=1}^2 \alpha_{1,j}(v, \varphi, t) dw_j(t),$$

$$d\varphi = \left(\omega(v) + \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}}) \right) dt + \mu \sum_{j=1}^2 \alpha_{2,j}(v, \varphi, t) dw_j(t),$$

где $\alpha_{i,j}(v, \varphi, t)$ — 2π -периодические по φ , $\alpha_{1,j}(0, \varphi, t) \equiv 0$ и $\alpha_{i,j}(v, \varphi, t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно для всех $v \in [0, E_0)$ и $\varphi \in \mathbb{R}$. Заметим, что построенные замены являются аналогом преобразований, описанных в первой главе, и усредняют только коэффициент сноса уравнения для переменной v . Причём вид функций $\Lambda_k(v)$ определяется соответствующими коэффициентами разложений $g_i(x_1, x_2, t)$ и $G_{i,j}(x_1, x_2, t)$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, исследование устойчивости решения $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ исходной стохастической системы сводится к изучению поведения траекторий усреднённой системы с $v(t)$ в окрестности нуля.

Рассматриваются различные предположения о поведении коэффициентов $\Lambda_k(v)$, $k \in [n, N]$ при $v \rightarrow 0$. Обсуждается как случай линейного главного члена $\Lambda_n(v) = \lambda_n v + \mathcal{O}(v^2)$, так и случаи, когда главный член нелинеен в окрестности равновесия. Устойчивость и неустойчивость по вероятности обосновываются с помощью построения стохастических функций Ляпунова для системы в исходных переменных. При этом за основу такой функции берётся соответствующая усредняющая замена переменных. Найдены критические значения и их зависимость от параметров шума. Также определены условия, гарантирующие появление устойчивых режимов, близких к периодическим, в возмущённой системе. В § 7.4 предложенная теория применяется к возмущённому третьему уравнению Пенлеве.

Результаты главы опубликованы в [17]. Связанные результаты о возмущениях, не сохраняющих равновесие предельной системы, опубликованы в [20].

В восьмой главе рассматриваются похожие стохастические возмущения, сохраняющие равновесие гамильтоновой системы. Предполагается, что функции $g_i(x_1, x_2, t)$ и $G_{i,j}(x_1, x_2, t)$ имеют асимптотические разложения (6) при $t \rightarrow \infty$ с осциллирующими коэффициентами. При этом фаза возмущений $S(t)$ имеет вид (7) и удовлетворяет резонансному условию $s_0 = \kappa\omega(0)$ с некоторым $\kappa \in \mathbb{Z}_+$. Цель главы — исследовать влияние таких резонансных возмущений на устойчивость системы при наличии белого шума.

Рассмотрим пример:

$$dx_1 = x_2 dt, \quad dx_2 = (-x_1 + t^{-1}b_0x_2) dt + \mu t^{-\frac{p}{2}}x_1 \cos S(t) dw_2(t) \quad (19)$$

при $t > 1$, где $S(t) \equiv s_0 t$, $b_0, \mu \in \mathbb{R}$, $p > 0$. В случае детерминированных возмущений ($\mu = 0$) из асимптотики решений при $t \rightarrow \infty$ следует, что равновесие асимптотически устойчиво при $b_0 < 0$ и неустойчиво при $b_0 > 0$ (рис. 4, а). Численный анализ системы с $b_0 \neq 0$, $\mu \neq 0$ и $s_0 = 1$ указывает на то, что устойчивость равновесия зависит от скорости затухания стохастических возмущений. Например, если $p = 2$, условия устойчивости, по-видимому, те же, что и в случае $\mu = 0$ (рис. 4, б). Однако, если $p = 1$, устойчивость равновесия меняется при переходе параметра b_0 через некоторое критическое значение $b_* \neq 0$ (рис. 4, в). Показывается, что смещение границы устойчивости возникает вследствие резонансного захвата в стохастической системе, и его величина зависит от параметра s_0 .

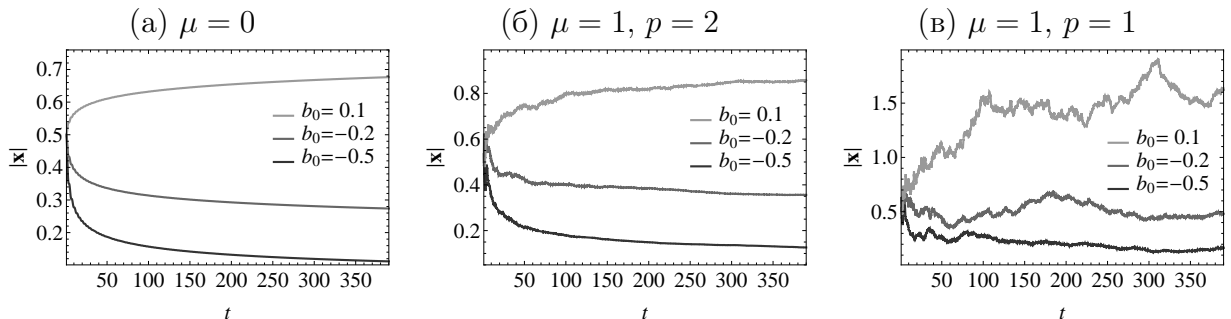


Рис. 4. Эволюция $|\mathbf{x}(t)|$ для реализаций решений системы (19).

На первом шаге в возмущённой системе делаются замены переменных, аналогичные тем, которые были описаны в главе 2. В частности, показывается, что для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ существуют $n, m \in [1, N]$, $\Delta_0 > 0$, $l \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ и

цепочка преобразований, которая приводит возмущённую систему к виду

$$\begin{aligned} dv &= \left(\sum_{k=n}^N t^{-\frac{k}{q}} \Lambda_k(v, \psi) + \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}}) \right) dt + \mu \sum_{j=1}^2 \alpha_{1,j}(v, \psi, t) dw_j(t), \\ d\psi &= \left(\sum_{k=m}^N t^{-\frac{k}{q}} \Omega_k(v, \psi) + \mathcal{O}(t^{-\frac{N+1}{q}}) \right) dt + \mu \sum_{j=1}^2 \alpha_{2,j}(v, \psi, t) dw_j(t), \end{aligned}$$

где $\alpha_{i,j}(v, \psi, t)$ — 2π -периодические по ψ , $\alpha_{1,j}(0, \psi, t) \equiv 0$ и $\alpha_{i,j}(v, \psi, t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{q}})$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно для всех $v \in [0, \Delta_0]$ и $\psi \in \mathbb{R}$. В этом случае построенная замена переменных усредняет первые члены асимптотического разложения коэффициентов сноса в уравнении для энергии v и для сдвига фазы ψ . Как и выше, коэффициенты асимптотических разложений $g_i(x_1, x_2, t)$ и $G_{i,j}(x_1, x_2, t)$ при $t \rightarrow \infty$ определяют вид и структуру функций $\Lambda_k(v, \psi)$ и $\Omega_k(v, \psi)$.

На следующем шаге исследуются решения соответствующей усеченной системы, полученной из усреднённой путём отбрасывания шумовых добавок. Из результатов третьей главы следует, что в зависимости от свойств коэффициента $\Omega_m(v, \psi)$ в усеченной системе реализуется либо режим фазового захвата при условии (9), либо фазового дрейфа при условии (10). В обоих режимах исследуется устойчивость равновесия $(0, 0)$ исходной системы при различных предположениях о поведении функции $\Lambda_n(v, \psi)$ при $v \rightarrow 0$ и скорости затухания коэффициентов матрицы диффузии $\sup_{|\mathbf{x}| \leq r_0} |\text{tr}(\mathbf{G}^T(\mathbf{x}, t)\mathbf{G}(\mathbf{x}, t))| \leq t^{-\frac{2p}{q}} |\mathbf{x}|^2$ при $t \geq t_0$ с некоторым параметром $p > 0$. Определим функцию $d(\mathbf{x}, t) \equiv \sqrt{t^{\frac{2l}{q}} H(x_1, x_2) + |\Phi(x_1, x_2) - \varkappa^{-1}S(t) - \hat{\psi}(t)|^2}$, где $\hat{\psi}(t)$ — функция, определённая в лемме 1, а $\Phi(x_1, x_2)$ — функция, соответствующая φ . Пусть $\Lambda_n(v, \psi) = v(\lambda_n(\psi) + o(1))$ при $v \rightarrow 0$. Тогда справедлива

Теорема 16. Пусть выполнено (9), $1 \leq n \leq m \leq q$, $\partial_\psi \Omega_m(0, \psi_*) < 0$, $\lambda_n(\psi_*) < 0$. Тогда для любых $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ существуют $\delta > 0$ и $t_s \geq \tau_0$ такие, что решение $\mathbf{x}(t)$ системы (17) с начальными данными $\mathbf{x}(t_s) = \mathbf{x}_0$, $d(\mathbf{x}_0, t_s) < \delta$ удовлетворяет неравенству

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t - t_s \leq \mathcal{T}} \{ |d(\mathbf{x}(t), t)| \} > \varepsilon_1 \right) < \varepsilon_2,$$

где $\mathcal{T} = C_0 \delta^2 \mu^{-2}$ при $2p < q$, $\mathcal{T} = t_s (e^{C_0 \delta^2 \mu^{-2}} - 1)$ при $2p = q$ и $\mathcal{T} = \infty$ при $2p > q$, с некоторой постоянной $C_0 > 0$.

Устойчивость равновесия в режиме фазового дрейфа обосновывается при более строгих ограничениях на коэффициент $\lambda_n(\psi)$.

Теорема 17. Пусть выполнено (10), $1 \leq m \leq q$, $\lambda_n(\psi) < 0$ для всех $\psi \in \mathbb{R}$. Тогда существует $t_s \geq \tau_0$ такое, что для любых $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta > 0$: решение $\mathbf{x}(t)$ системы (17) с начальными данными $\mathbf{x}(t_s) = \mathbf{x}_0$, $|\mathbf{x}_0| < \delta$ удовлетворяет условию $\mathbb{P}(\sup_{t \geq t_s} \{t^{\frac{l}{q}} |\mathbf{x}(t)|\} > \varepsilon_1) < \varepsilon_2$.

В главе также исследуются условия устойчивости равновесия для случая нелинейных по v коэффициентов $\Lambda_n(v, \psi)$.

Результаты главы опубликованы в [24]. Полученные результаты указывают на возможность устойчивого фазового захвата в системах с затухающими стохастическими возмущениями.

В девятой главе исследуется влияние белого шума на резонансный захват в системах с затухающими чирпированными возмущениями. Возмущённая система рассматривается в виде

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 dt, \\ dx_2 &= (-U'(x_1) + t^{-\alpha} Q(x_1, x_2, S(t))) dt + \mu t^{-\gamma} \sigma(x_1, x_2, S(t)) dw(t) \end{aligned} \quad (20)$$

с параметрами $\alpha, \gamma, \mu \in \mathbb{R}_+$ и потенциалом $U(x) \equiv x^{2h+2}/(2h+2) + P_h(x)$ и $P_h(x)$ — многочлен степени не выше $2h+1$, $h \in \mathbb{Z}$. Предполагается, что $Q \equiv \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^l Q_{i,j}(S) x_1^i x_2^j$, $\sigma \equiv \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sigma_{i,j}(S) x_1^i x_2^j$, где $l, p, n, m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq l \leq p \leq 2h+1$, $0 \leq n \leq p$, $0 \leq m \leq l$, коэффициенты $Q_{i,j}(S)$ и $\sigma_{i,j}(S)$ являются 2π -периодическими по S . Функция $S(t) \equiv st^{\beta+1}$ с параметрами $\beta, s \in \mathbb{R}_+$ соответствует фазе возмущения.

В качестве примера рассмотрим возмущённый осциллятор Дуффинга.

$$dx_1 = x_2 dt, \quad dx_2 = (x_1 - x_1^3 + t^{-\alpha} Q \cos S(t)) dt + \mu t^{-\gamma} x_1^n \cos S(t) dw(t) \quad (21)$$

с параметром Q . Численный анализ показывает, что система (21) с $\mu = 0$ имеет резонансные решения с неограниченно растущей амплитудой, а также ограниченные решения (рис. 5, а). Если $\mu \neq 0$, стохастические возмущения могут нарушить резонансный захват (см. рис. 5, б). Цель — найти условия, при которых захват в резонанс сохраняется в стохастической системе (20).

С помощью замен переменных, аналогичных описанным в главе 5, усредняются первые члены асимптотического разложения коэффициентов сноса возмущённой системы. Выводится укороченная система и показывается, что

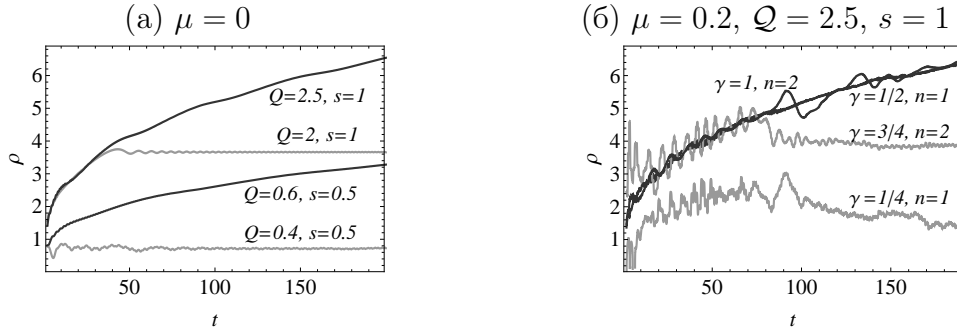


Рис. 5. Эволюция $\rho(t) = \sqrt[4]{x_2^2(t)/2 + U(x_1(t))}$ для системы (21) при $\alpha = \beta = 1/3$.

необходимым условием захвата является $-1 \leq \max\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\} < \beta$, где

$$\mathcal{M}_1 = -\alpha + \frac{\beta(p + (l-1)(h+1))}{h}, \quad \mathcal{M}_2 = -2\gamma + \frac{2\beta(n + (m-1)(h+1))}{h}.$$

С резонансом связаны решения с растущей энергией $E(t)$, для которой $E(t) = \mathcal{O}(t^{(2h+2)\beta/h})$ при $t \rightarrow \infty$, и фазой, синхронизированной с возмущением: $\phi(t) \sim \varkappa^{-1}S(t)$, где $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$. При $3\mathcal{M}_1 - 2\mathcal{M}_2 \geq \beta$ и некоторых дополнительных условиях доказывается устойчивость резонансных решений в режиме фазовой синхронизации в стохастической системе на асимптотически больших временных интервалах.

Результаты главы опубликованы в [28].

В заключении кратко резюмируются результаты диссертации и обозначаются открытые вопросы.

Список публикаций по теме диссертации

1. Султанов О. А. Устойчивость авторезонанса в диссипативных системах // Уфимский математический журнал. 2015. Т. 7, № 1. С. 59–71.
2. Sultanov O. A. Random perturbations of autoresonance in oscillating systems with small dissipation // Journal of Mathematical Sciences. 2016. Vol. 219, no. 2. P. 267–274.
3. Sultanov O. A. Random perturbations of parametric autoresonance // Non-linear Dynamics. 2017. Vol. 89, no. 4. P. 2785–2793.
4. Sultanov O. White noise perturbation of locally stable dynamical systems // Stochastics and Dynamics. 2017. Vol. 17, no. 1. P. 1750002.
5. Султанов О. А. Стохастическая устойчивость динамической системы, возмущенной белым шумом // Математические заметки. 2017. Т. 101, № 1. С. 130–139.

6. Sultanov O. Stability and asymptotic analysis of the autoresonant capture in oscillating systems with combined excitation // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 2018. Vol. 78, no. 6. P. 3103–3118.
7. Sultanov O. Lyapunov functions and asymptotic analysis of a complex analogue of the second Painlevé equation // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1205. P. 012056.
8. Sultanov O. A. Stochastic perturbations of stable dynamical systems: trajectory-wise approach // *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 241, no. 3. P. 340–353.
9. Sultanov O. A. Capture into parametric autoresonance in the presence of noise // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2019. Vol. 75. P. 14–21.
10. Sultanov O. A. Bifurcations of autoresonant modes in oscillating systems with combined excitation // *Studies in Applied Mathematics*. 2020. Vol. 144, no. 2. P. 213–241.
11. Sultanov O. A. Autoresonance in oscillating systems with combined excitation and weak dissipation // *Physica D*. 2021. Vol. 417. P. 132835.
12. Sultanov O. A. On the almost sure stability of dynamical systems with respect to white noise // *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 252, no. 2. P. 242–246.
13. Sultanov O. A. Decaying oscillatory perturbations of Hamiltonian systems in the plane // *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 257, no. 5. P. 705–719.
14. Sultanov O. A. Lyapunov functions and asymptotics at infinity of solutions of equations that are close to Hamiltonian equations // *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 258, no. 1. P. 97–109.
15. Sultanov O. A. Bifurcations in asymptotically autonomous Hamiltonian systems under oscillatory perturbations // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2021. Vol. 41, no. 12. P. 5943–5978.
16. Sultanov O. A. Damped perturbations of systems with center-saddle bifurcation // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2021. Vol. 31, no. 9. P. 2150137.
17. Sultanov O. A. Bifurcations in asymptotically autonomous Hamiltonian systems subject to multiplicative noise // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2022. Vol. 32, no. 11. P. 2250164.
18. Sultanov O. A. Stability and bifurcation phenomena in asymptotically Hamil-

- tonian systems // *Nonlinearity*. 2022. Vol. 35, no. 5. P. 2513–2534.
19. Sultanov O. A. Capture into resonance in nonlinear oscillatory systems with decaying perturbations // *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 262, no. 3. P. 374–389.
 20. Sultanov O. A. Long-term behaviour of asymptotically autonomous Hamiltonian systems with multiplicative noise // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2023. Vol. 22, no. 3. P. 1818–1851.
 21. Sultanov O. A. Asymptotic analysis of systems with damped oscillatory perturbations // *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 269, no. 1. P. 111–128.
 22. Sultanov O. A. Resonances in asymptotically autonomous systems with a decaying chirped-frequency excitation // *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*. 2023. Vol. 28, no. 3. P. 1719–1749.
 23. Sultanov O. A. Resonance in isochronous systems with decaying oscillatory perturbations // *Qualitative Theory of Dynamical Systems*. 2024. Vol. 23, no. Suppl 1. P. 295.
 24. Sultanov O. A. Stability of asymptotically Hamiltonian systems with damped oscillatory and stochastic perturbations // *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2024. Vol. 23, no. 4. P. 432–462.
 25. Sultanov O. A. Asymptotic regimes in oscillatory systems with damped non-resonant perturbations // *Nonlinear Dynamics*. 2024. Vol. 112, no. 4. P. 2589–2609.
 26. Султанов О. А. Стохастическая устойчивость модели авторезонанса с бифуркацией типа центр-седло // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2024. Т. 32, № 2. С. 147–159.
 27. Sultanov O. A. Resonance modes in isochronous systems with a decaying combined excitation // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2025. Vol. 46, no. 7. P. 3198–3211.
 28. Sultanov O. A. Resonances in nonlinear systems with a decaying chirped-frequency excitation and noise // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2025. Vol. 145. P. 108713.
 29. Sultanov O. A. Nonlinear resonance in oscillatory systems with decaying perturbations // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2025. Vol. 45, no. 5. P. 1691–1719.