

На правах рукописи



Шарыгин Георгий Игорьевич

**СВОЙСТВА КЛАССИЧЕСКИХ И КВАНТОВЫХ
ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ**

1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая физика

Автореферат на соискание учёной степени доктора
физико-математических наук

Москва
2025

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова», кафедра Дифференциальной геометрии и приложений

НАУЧНЫЙ КОНСУЛЬТАНТ: -

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

Лычагин Валентин Васильевич — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Лаборатории 06 «Управления сплошными средами им. А.Г. Бутковского» Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук (специальность — 01.01.02).

E-mail: lychagin@math.uit.no; Valentin.Lychagin@matnat.uit.no

Сапонов Павел Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор факультета математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ “ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ”» (специальность 01.04.02).

E-mail: saponovp@gmail.com

Цыганов Андрей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной физики физического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет» (специальность 01.04.02).

E-mail: a.tsyganov@spbu.ru; andrey.tsiganov@gmail.com

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Защита диссертация состоится 26 февраля 2026 года в 14 часов на заседании диссертационного совета 24.1.167.02 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте <https://mi-ras.ru/dis/ref25/sharygin/dis.pdf>

Автореферат разослан «___» октября 2025 года

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.167.02 при МИАН



кандидат физико-математических наук _____ А.Е. Теретёнков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы Представляемая диссертация посвящена исследованию геометрических и алгебраических вопросов связанных с полной симметрической системой Тоды и некоторыми другими системами такого рода. В частности, исследуются вопросы предельного поведения траекторий таких систем, вопрос построения дополнительных интегралов таких систем, и описываются конструкции, позволяющие получить «деформационное квантование» систем такого рода. Автором дано описание предельного поведения траекторий в терминах порядка Брюа на группе Вейля, в частности, это описание позволяет сделать вывод о том, как пересекаются вещественные клетки Брюа напространства флагов. Кроме того, в диссертации описана «квантовая» версия метода сдвига инвариантов, позволяющая строить коммутативные подалгебры в универсальной обертывающей алгебре $U\mathfrak{gl}_d$, «накрывающие» алгебры первых интегралов некоторых интегрируемых систем, в частности, полной симметрической системы Тоды. Остановимся подробнее на этих конструкциях.

Система Тоды или, как принято говорить *открытая цепочка Тоды* была впервые аналитически исследована японским физиком Морикадзу Тодой в 1967 году. Это динамическая система, состоящая из n материальных точек на прямой с координатами q^1, q^2, \dots, q^n и импульсами p_1, p_2, \dots, p_n с гамильтонианом

$$H = -\sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \exp(q^i - q^{i+1}).$$

Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = p_i, \\ \frac{dp_i}{dt} = e^{q_i - q_{i-1}} - e^{q_i - q_{i+1}}. \end{cases} \quad (0.1)$$

Отметим, что первое из этих уравнений справедливо при $i = 1, \dots, n$, а второе — теряет одно из слагаемых справа при $i = 1, i = n$. Если сделать замену координат

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{2}(q^i - q^{i+1})\right), \\ b_j &= -\frac{1}{2} p_j, \end{aligned} \quad (0.2)$$

где $i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, n$, то уравнения (0.1) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= a_i (b_{i+1} - b_i), \\ \dot{b}_i &= \frac{1}{2} (a_i^2 - a_{i-1}^2). \end{aligned} \quad (0.3)$$

Рассмотрим матрицы

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения (0.3) эквивалентны следующему матричному равенству:

$$\dot{L} = [M, L]. \quad (0.4)$$

Отсюда несложно вывести интегрируемость исходной системы: очевидно, что любая функция F от коэффициентов матрицы L , инвариантная относительно сопряжения невырожденными матрицами, будет первым интегралом системы. Обычно в качестве таких функций выбирают $H_k = \frac{1}{k} \text{tr}(L^k)$, $k = 1, \dots, n$, при этом гамильтониан равен H_2 . То, что функции H_k находятся в инволюции, несложно доказать, переписав, например, скобку Пуассона в координатах a_i, b_j .

Вскоре после обнаружения замечательных свойств системы Тоды, на волне возникшего интереса, эту систему начали подробно исследовать и обобщать. Таким образом были найдены другие системы дифференциальных уравнений с замечательными свойствами, которые традиционно называют «обобщёнными системами Тоды»; обычно такие системы находят, модифицируя уравнения (0.3) на функции a_i, b_i (см. замену (0.2)) или меняя вид матрицы Лакса L системы. В числе таких обобщений можно упомянуть неограниченную открытую цепочку Тоды (то есть систему уравнений (0.3), связывающую бесконечную последовательность функций a_i, b_i); периодическую цепочку Тоды (получающуюся, если наложить условие $q^{n+1} = q^1, p_{n+1} = p_1$ в уравнениях (0.1), так что теперь они могут быть единым образом записаны при всех $i = 1, \dots, n$); двумеризованные и дискретизованные варианты систем Тоды, а также два варианта «полных» систем Тоды (то есть систем, матрицы Лакса которых содержат отличные от нуля коэффициенты в большинстве внедиагональных позиций): полную систему Костанта-Тоды и полную симметрическую систему Тоды.

Главным предметом нашего интереса будет являться *полная симметрическая система Тоды*. Эту систему проще всего определить при помощи матричного уравнения (0.4): для этого обратим внимание, что матрица M является антисимметризацией матрицы L :

$$M = M(L) = L_+ - L_-, \quad (0.5)$$

где L_+ (соотв. L_-) — над- (соотв. под-) диагональная часть матрицы L .

Возьмем теперь в качестве L и M матрицы

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда *полной симметрической системой Тоды* называется система уравнений на коэффициенты симметричной матрицы L , задающаяся в матричном виде равенством (0.4): $\dot{L} = [M, L]$, где матрица M равна антисимметризации L .

Эта система попала в поле зрения ученых в конце 70-х — начале 80-х годов и довольно быстро удалось показать, что полная симметрическая система Тоды является системой Гамильтона относительно некоторой пуассоновой структуры на пространстве симметрических матриц, причем гамильтониан равен функции $H = \frac{1}{2}\text{tr}(L^2)$. Как и раньше, функции $H_k = \frac{1}{k}\text{tr}(L^k)$ являются первыми интегралами в инволюции данной системы, однако их не хватает для того, чтобы можно было говорить об интегрируемости этой системы. Первый инволютивный набор первых интегралов полной симметрической системы Тоды был построен в 1984 году в работе Deift, Lee, Nando и Tomei, их конструкция основывалась на довольно сложных вычислениях.

Очевидно, что так как функции H_k являются инвариантами системы, то собственные значения λ_i матрицы L сохраняются в ходе эволюции. Кроме того, было обнаружено, что траектории этой системы при стремлении времени к $\pm\infty$ стремятся к диагональным матрицам, отличающимся только порядком диагональных элементов λ_i . В работах Block, Gekhtman и Ratiu было установлено, что система Тоды эквивалентна некоторой градиентной системе на компактном пространстве флагов, что объясняло предельное поведение траекторий, однако оставался открытым вопрос о том, какие перестановки собственных значений могут появляться в пределе. Этот вопрос был исследован автором диссертации (см. работу [1']): оказалось, что существование траекторий, стремящихся к тем или иным перестановкам чисел λ_i зависит от положения этих перестановок относительно порядка Брюа на группе S_n .

Отметим, что, пользуясь разложением Картана вещественной алгебры Ли \mathfrak{g} ,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

можно определить системы аналогичные полной симметрической системе Тоды на симметрической части \mathfrak{p} такого разложения. В этом случае большая часть утверждений относительно свойств системы Тоды остается справедливой. В частности, пределы траекторий таких систем всегда оказываются точками из алгебры Картана выбранного разложения, отличающимися друг от друга только действием группы Вейля $W(\mathfrak{g})$. В этом случае тоже можно доказать, что переход от одного такого элемента к другому зависит

только от того, сравнимы ли по Брюа данные элементы $W(\mathfrak{g})$, однако, если в классическом случае мы могли воспользоваться свойствами клеток Брюа в вещественных пространствах флагов, в случае произвольной алгебры Ли \mathfrak{g} доказательство использует свойства самого векторного поля. В результате, в этом случае удается вывести утверждение о пересечении вещественных клеток Брюа (нам не удалось обнаружить его в доступных источниках) из свойств системы Тоды, а не наоборот, см. работу [3'].

Кроме того, как уже было указано, построение дополнительных первых интегралов полной симметрической системы Тоды представляет из себя нетривиальную задачу. В упоминавшейся выше работе Deift, Lee, Nando, Tomei коммутирование дополнительных интегралов доказывали при помощи довольно сложных вычислений. Автором диссертации предложена конструкция, позволяющая свести это доказательство к простому следствию «метода сдвига инвариантов», что позволило впоследствии легко строить элементы в универсальной обёртывающей алгебре $U\mathfrak{gl}_d$, накрывающие эти первые интегралы, см. работы [5'], [15'].

Вообще, в работе [15'] даётся ответ на другой важный вопрос: построение деформационного квантования класса интегрируемых систем на пространстве \mathfrak{gl}_d^Y (двойственном пространстве к алгебре Ли \mathfrak{gl}_d , снабжённом стандартной пуассоновой структурой). Напомним, что *задача деформационного квантования гладкого пуассонова многообразия X* состоит в построении на пространстве формальных степенных рядов $C^\infty(X)[[\hbar]]$ некоторого $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -линейного ассоциативного умножения \star на $\mathcal{A}(X)$ такого, что

$$f \star g = fg + \frac{\hbar}{2}\{f, g\} + o(\hbar).$$

Тут $\{f, g\}$ — скобка Пуассона на функциях f, g , а выражение $o(\hbar)$ обозначает слагаемые, в которые \hbar входит в степени 2 или выше. Таким образом, задание деформационного квантования многообразия X можно рассматривать как инфинитезимальную деформацию умножения в алгебре гладких функций на X . Итак, обозначим через $\mathcal{A}(X)$ такую некоммутативную алгебру; напомним, что как модуль над $\mathbb{C}[[\hbar]]$, алгебра $\mathcal{A}(X) \cong C^\infty(X)$.

Предположим, на многообразии X (симплектическом или пуассоновом), на котором нам дано деформационное квантование, определена некоторая интегрируемая система с гамильтонианом H . Пусть $H = H_1, \dots, H_N$ — коммутативная система первых интегралов этой системы. Тогда естественным вопросом будет следующий: *существует ли способ дополнить функции H_1, \dots, H_N (рассматриваемые как элементы алгебры $\mathcal{A}(X)$) до коммутлирующих между собой (в смысле \star -умножения) элементов $\hat{H}_1, \dots, \hat{H}_N$* ? То есть должны выполняться равенства

$$\hat{H}_k = H_k + \hbar H_{k,1} + \hbar^2 H_{k,2} + \dots \quad (0.6)$$

и

$$\hat{H}_i \star \hat{H}_j = \hat{H}_j \star \hat{H}_i \text{ для всех } i, j = 1, \dots, N. \quad (0.7)$$

Эту проблему можно назвать *вопросом о деформационном квантовании динамической системы*. Ей посвящена серия работ автора, см. [8'], [11'], [12'] и другие.

Как и следовало ожидать, ответ на этот вопрос связан с набором кохомологических классов в некотором варианте кохомологий Хохшильда алгебры $C^\infty(X)$. Кроме того, эта задача тесно связана с задачей построения эквивариантного деформационного квантования. А именно, пусть задан гомоморфизм алгебр Ли $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{T}_{poly}^1(X)$, где мы рассматриваем $\mathcal{T}_{poly}^1(X) = Vect(X)$ (пространство векторных полей на X) как алгебру Ли относительно коммутатора векторных полей. Эквивалентным образом можно сказать, что задано действие \mathfrak{g} на алгебре $C^\infty(X)$ при помощи дифференцирований этой алгебры; то есть для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ и любых гладких функций f, g на X выполнены равенства

$$\rho(\xi)(fg) = \rho(\xi)(f)g + f\rho(\xi)(g), [\rho(\xi), \rho(\eta)] = \rho([\xi, \eta])$$

Тогда задача эквивариантного квантования может быть сформулирована следующим образом: *Требуется найти \star -произведение на X такое, что действие \mathfrak{g} на X продолжается до действия алгебры Ли \mathfrak{g} дифференцированиями на квантованной алгебре $(C^\infty(X)[[\hbar]], \star)$* . В этом случае тоже возникает набор кохомологических препятствий, принимающих значения в эквивариантных кохомологиях Хохшильда. В случае, когда действие алгебры Ли индуцировано из гамильтоновых полей первых интегралов в инволюции, эти препятствия тесно связаны с предыдущими. Кроме того, аналогично построению квантования Концевичем, мы показываем, как вопрос о существовании эквивариантного деформационного квантования связан с формальностью некоторой дифференциальной градуированной алгебры Ли.

Наконец, важным примером пуассоновых многообразий является пространство, двойственное к некоторой алгебре Ли \mathfrak{g} . Скобка Пуассона на \mathfrak{g}^* задаётся формулой

$$\{f, g\}(\xi) = \xi([df(\xi), dg(\xi)]), \quad \xi \in \mathfrak{g}^* \quad (*)$$

где мы отождествляем кокасательное пространство $T_\xi^* \mathfrak{g}^*$ с $(\mathfrak{g}^*)^* = \mathfrak{g}$, так что $df, dg \in \mathfrak{g}$ и $\xi(X)$, $X \in \mathfrak{g}$ обозначает каноническое спаривание двойственных пространств.

На пространстве \mathfrak{g}^* имеются глобальные аффинные координаты, поэтому вместо алгебры гладких функций на \mathfrak{g}^* можно использовать алгебру полиномов от этих координат. Можно проверить, что в этом случае деформационный ряд от полиномов f, g содержит только конечное число ненулевых слагаемых: это следует из того, что степени бидифференциальных операторов B_k неограниченно растут с ростом k . В этом случае можно положить $\hbar = 1$ и рассматривать операцию \star -произведения, как новое ассоциативное умножение на алгебре полиномиальных функций на \mathfrak{g}^* . Известно, что пространство $S(\mathfrak{g})$, снабженное этим новым умножением \star , изоморфно универсальной обёртывающей алгебре $U\mathfrak{g}$; напомним, что универсальная

обёртывающая алгебра это фактор-алгебра тензорной алгебры $T^\otimes \mathfrak{g}$ по идеалу, порожденному коммутаторами в \mathfrak{g} :

$$U\mathfrak{g} = T^\otimes \mathfrak{g} / \langle X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y] \rangle.$$

Согласно *теореме Пуанкаре-Биркхоффа-Витта*, универсальная обёртывающая алгебра, как векторное пространство, изоморфно алгебре $S(\mathfrak{g})$. Более того, изоморфизм $S(\mathfrak{g}) \cong U\mathfrak{g}$ может быть записан в виде отображения симметризации:

$$\sigma : S(\mathfrak{g}) \rightarrow U\mathfrak{g}, \quad \sigma(X_1, \dots, X_k) = \frac{1}{k!} \sum_{s \in S_k} X_{s(1)} \dots X_{s(k)}.$$

Это отображение не сохраняет умножение, но перестановочно с действием группы Ли G , соответствующей алгебре \mathfrak{g} . В частности, оно переводит пространство полиномиальных функций Казимира в $S(\mathfrak{g})$ в центр алгебры $U\mathfrak{g}$; при этом, правда, произведение полиномов Казимира не перестановочно с умножением в центре $U\mathfrak{g}$. Утверждение об изоморфизме $(S(\mathfrak{g}), \star) \cong U\mathfrak{g}$ можно переформулировать следующим образом: умножение Концевича на $S(\mathfrak{g})$ изоморфно произведению

$$f \star' g = \sigma^{-1}(\sigma(f) \cdot \sigma(g)), \quad \forall f, g \in S(\mathfrak{g}).$$

Тут \cdot обозначает умножение в $U\mathfrak{g}$. Скобка Пуассона в $S(\mathfrak{g})$ может быть восстановлена из этого изоморфизма: если степени однородных полиномов f, g равны p и q соответственно, то несложно доказать равенство

$$\{f, g\} = (f \star g - g \star f)_{p+q-1},$$

где для $a \in S(\mathfrak{g})$, мы обозначили через a_k однородную компоненту степени k .

Среди интегрируемых систем (пуассон-коммутативных подалгебр в $S(\mathfrak{g})$) на пространстве \mathfrak{g}^* можно выделить класс, получающийся методом «сдвига инвариантов». Впервые первые интегралы такого рода были описаны Манаковым в 1974 году при исследовании уравнений движения многомерного твердого тела (уравнений Эйлера-Арнольда); в 1978 году его наблюдения были обобщены в работе А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко. Вкратце конструкция алгебр сдвига инвариантов сводится к следующему утверждению: *пусть f, g — две функции из пуассонова центра алгебры $S(\mathfrak{g})$, а ξ — произвольное постоянное векторное поле на \mathfrak{g}^* ; тогда кратные производные функций f и g вдоль ξ коммутируют между собой (относительно скобки Пуассона).*

Отметим, что постоянные векторные поля на \mathfrak{g}^* можно отождествить с элементами пространства \mathfrak{g}^* . Таким образом мы получаем для каждого $\xi \in \mathfrak{g}^*$ пуассоново-коммутативную подалгебру $A_\xi \subseteq S(\mathfrak{g})$, которая (в случае полупростых алгебр Ли) будет максимальной для почти всех ξ . Эти алгебры называются «алгебрами сдвига инвариантов» или «алгебрами сдвига аргумента».

Вопрос о подъёме таких алгебр в универсальную обертывающую алгебру $U\mathfrak{g}$, то есть построения коммутативных подалгебр $\hat{A}_\xi \in U\mathfrak{g}$ (называемых «квантовыми алгебрами сдвига аргумента»), которые соответствовали бы A_ξ относительно теоремы Пуанкаре-Биркоффа-Витта, был впервые поставлен Э.Б.Винбергом в 1991 году. За прошедшее время было предложено несколько методов построения таких алгебр, известны конструкции Ольшанского и Назарова, Тарасова, Рыбникова; позднее, Молевым, Футорным и Якимовой были построены явные наборы образующих таких алгебр.

Все перечисленные конструкции, однако, основывались на рассмотрении того или иного рода набора образующих центра универсальной обертывающей алгебры, однако вопрос о том, имеется ли на этих алгебрах аналог процедуры сдвига аргумента, в указанных работах не затрагивался, и поэтому описать элементы квантовых алгебр сдвига аргумента, соответствующие данным элементам в алгебрах A_ξ представляет порой непростую задачу. В представленной диссертации предложена конструкция оператора, выполняющего роль оператора сдвига на алгебре $U\mathfrak{gl}_d$ и доказано, что этот оператор в самом деле порождает квантовую алгебру сдвига $\hat{A}_\xi \subseteq u\mathfrak{gl}_d$, см. работы [13'], [15'] и [20']. В частности, при помощи этого метода можно построить элементы универсальной обертывающей алгебры, «поднимающие» первые интегралы полной симметрической системы Тоды.

Цели и задачи исследования Целью данной диссертационной работы является изучение геометрических и алгебраических аспектов теории ливиллевых интегрируемых систем, прежде всего на пространствах, двойственных к алгебрам Ли, выявление связей между «классическими» и «квантовыми» системами такого рода. Для достижения поставленных целей в работе изучаются следующие основные задачи:

1. Изучить предельное поведение траекторий полной симметрической системы Тоды на пространстве вещественных симметрических матриц с нулевым следом; доказать, что это поведение полностью определяется порядком Брюа на группе перестановок S_n .
2. Изучить полные симметрические системы Тоды, ассоциированные с разложениями Картана произвольных вещественных полупростых алгебр Ли, описать связь предельного поведения их траекторий с порядком Брюа на группах Вейля этих алгебр Ли; в частности, доказать, что положительные и отрицательные вещественные клетки Брюа в таком случае пересекаются если и только если соответствующие элементы группы Вейля сравнимы по Брюа.
3. Построить инварианты и векторные поля, задающие симметрии полной симметрической системы Тоды на вещественных полупростых алгебрах Ли, выделить среди этих симметрий коммутативные подалгебры Ли векторных полей.
4. Описать метод построения дополнительных интегралов в инволюции полной симметрической системы Тоды, основанный на методе сдвига

аргумента, использовать его для поиска траекторий дополнительных интегралов.

5. Описать когомологические препятствия в задаче построения квантовой интегрируемой системы на пуассоновом или симплектическом многообразии.
6. Описать когомологические препятствия в задаче построения эквивариантного квантования пуассоновых и симплектических многообразий и описать связь между этой задачей и задачей построения квантовых интегрируемых систем (задачей построения «квантового отображения момента»).
7. Описать построение коммутативных подалгебр в алгебрах деформационного квантования, получающихся при помощи сдвига L_∞ -сдвига аргумента.
8. Описать операторы, порождающие квантовые алгебры сдвига аргумента в универсальной обёртывающей алгебре $U\mathfrak{gl}_d$, и использовать их для поднятия в $U\mathfrak{gl}_d$ инволютивных интегралов полной симметрической системы Тоды.

Методы исследования В диссертации используются методы дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и их универсальных обёртывающих алгебр, теории гамильтоновых интегрируемых систем, методы деформационного квантования, методы теории гомологий и гомологической алгебры (прежде всего, теория когомологий Хохшильда), методы теории L_∞ -алгебр и морфизмов.

Научная новизна Результаты автора, выносимые на защиту, являются новыми, получены автором самостоятельно, и состоят в следующем.

1. Дано описание фазового портрета полной симметрической системы Тоды на пространстве вещественных симметричных матриц и на пространствах обобщенных симметрических матриц (подпространствах $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$ разложения Картана вещественной алгебры Ли \mathfrak{g}); в частности, доказано, что положительные и отрицательные клетки Брюа для вещественных полупростых групп пересекаются, если соответствующие элементы сравнимы по Брюа;
2. Предложена конструкция *обобщенных полей Тоды* на максимальных компактных подгруппах вещественных групп Ли и изучены их свойства: найдены конструкции инвариантных функций таких полей, предложена конструкция симметрий для полей Тоды на максимальных компактных подгруппах, в том числе коммутативных семейств симметрий;

3. Построены кохомологические препятствия со значениями в кохомологиях Хохшильда в задаче деформационного квантования интегрируемой системы на пуассоновом многообразии, для чего, в частности, описаны «относительные кохомологии Хохшильда»; в дальнейшем на основании этих конструкций построены кохомологические препятствия со значениями в кохомологиях Лихнеровича-Пуассона, обобщающие препятствия Гарая-ван Стратена, для чего, в частности, дано определение *относительных кохомологий Лихнеровича-Пуассона*;
4. Дано определение ДГ алгебры Ли, отвечающей за существование эквивариантного квантования; на основании этой конструкции задача построения эквивариантного деформационного квантования сведена к построению L_∞ -гомоморфизма между некоторыми ДГ алгебрами Ли;
5. Изучена задача деформационного квантования метода сдвига аргумента на пуассоновом многообразии общего вида при помощи кохомологических методов: дано определение и изучены свойства L_∞ -дифференцирований, удовлетворяющих условиям типа *условия Нийенхёйса*;
6. Изучена процедура сдвига аргумента в универсальной обёртывающей алгебре $U\mathfrak{gl}_d$ алгебры Ли \mathfrak{gl}_d при помощи квазидифференцирований Гуревича, Сапонова и Пятова: дано описание операторов квазидифференцирования в терминах частных производных на $S\mathfrak{gl}_d$, доказано утверждение о коммутировании итерированных квазипроизводных от образующих центра алгебры $U\mathfrak{gl}_d$; предложена процедура «квантового сдвига аргумента» в универсальной обёртывающей алгебре $U\mathfrak{gl}_d$ алгебры Ли \mathfrak{gl}_d ; при помощи квантового метода сдвига аргумента построено деформационное квантование алгебры дополнительных первых интегралов системы Эйлера-Арнольда (интегралов Манакова) и полной симметрической системы Тоды, а также построена коммутативная алгебра операторов на тензорных произведениях векторных пространств.

Кроме того, к перечисленным результатам можно добавить примыкающие к ним (но не вошедшие в основную часть диссертации) конструкции квантовых динамических систем и связанные с ними результаты в некоммутативной геометрии и теории квазидетерминантов, опубликованные в работах [17'], [18'] и [19'].

Теоретическая и практическая ценность Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть применены в теории интегрируемых систем, как классических гамильтоновых систем на алгебрах Ли, так и в теории квантовых интегрируемых систем (при изучении примеров таких систем и установления связей между ними) в теории алгебр и групп Ли (для построения коммутативных подалгебр в универсальных

обёртывающих алгебрах). Часть результатов представленной работы может послужить основой для дальнейших исследований, на уровне студентов и аспирантов. В частности, перенос конструкции операторов сдвига с алгебры $U\mathfrak{gl}_d$ на универсальную обёртывающую алгебру произвольной алгебры Ли (или хотя бы на универсальные обёртывающие алгебры основных классических серий алгебр Ли) представляет из себя открытую проблему, потенциально связывающую между собою теорию алгебр Ли, теорию янгианов и квантовых групп с геометрией групп Ли и теорией интегрируемых систем.

Апробация работы Результаты, входящие в состав диссертации, неоднократно докладывались на различных семинарах и конференциях, как общероссийских, так и международных. В частности, можно указать следующие семинары:

- семинар «Геометрия, топология и математическая физика» (руководители: академик РАН С.П.Новиков, чл.-корр. РАН В.М.Бухштабер), МИАН им. В.А.Стеклова и мех.-мат. МГУ им. М.В.Ломоносова — март 2014 год, февраль 2023 год, июль 2023 год;
- кафедральный семинар кафедры дифференциальной геометрии и приложений МГУ им. М.В.Ломоносова (руководитель: академик РАН А.Т.Фоменко) — 2014 год, 2021 год, ноябрь 2023 года;
- семинар «Неокмутативная геометрия и топология» (руководители профессор А.С.Мищенко, профессор В.М.Мануйлов), мех.-мат. факультет МГУ им. М.В.Ломоносова — 2015 год, 2022 год;
- семинар «Современные геометрические методы» (руководители: академик РАН А.Т.Фоменко, профессор А.А.Ошемков), мех.-мат. МГУ им. М.В.Ломоносова — 2015 год;
- семинар по интегрируемым системам (руководители А.В.Михайлов и Д.В.Талалаев), Центр Интегрируемых Систем, ЯрГУ им. Демидова — март 2022, июнь 2023 и май 2024;
- семинар «Геометрия, топология и их приложения» (руководитель академик РАН И.А.Тайманов), ИМ им. С.Л.Соболева СО РАН, — весна 2021 года;
- семинар по теоретической физике ОИЯИ (семинар лаборатории имени Н.Н.Боголюбова), — весна 2019 года;
- семинар лаборатории алгебраической геометрии и гомологической алгебры (руководитель А.И.Бондал), МФТИ, г. Долгопрудный — декабрь 2023 года;
- семинар по геометрии и топологии, университет города Анжер, Франция (руководитель В.Н.Рубцов), — февраль 2015, апрель 2018, январь 2020 годов;

- семинар по математической физике, университет Бургундии (руководитель Дж. Дито), г. Дижон, Франция — февраль 2020 года;
- семинар «Когомологии в алгебре, геометрии, физике и статистике» (руководитель Хонг Ван Ле), Карлов Университет и Институт Математики Чешской АН, — март 2021;
- семинар по симплектической геометрии и математической физике, Пекинский Университет (руководители Си Юанченг и Си Сюе), г. Пекин, КНР — октябрь 2019 года, ноябрь 2022 и сентябрь 2023 годов;
- семинар по интегрируемым системам ВІMSA (Пекинский Институт Математических наук и Приложений, руководители Н.Н.Решетихин, А.В.Цыганов), г. Пекин, КНР — ноябрь 2023 года.

Кроме того можно указать выступления на семинарах в университетах Брно и Градца Кралове (Чехия, ноябрь 2014 года), в Цзилиньском Университете (КНР, сентябрь 2022 года), Унивеситете Цзяо Тонг (г. Шанхай, КНР, ноябрь 2019 года) и Южно-Китайском политехническом Университете (г. Гуанчжоу, октябрь 2023 года).

Результаты диссертации также излагались на различных российских и международных конференциях, из которых можно упомянуть

- международные конференции «Динамика в Сибири» февраль-март 2018, 2019, 2022 и 2023 годы, в математическом институте СО РАН им. С.Л.Соболева;
- международные конференции «Интегрируемые системы и нелинейная динамика», октябрь 2018, 2020, 2021, 2023 годы, ЯрГУ им. Демидова;
- международная конференция GEOQUANT-2013, Вена, Институт Эрвина Шредингера, 27-31 августа 2013;
- международная конференция GEOQUANT-2019, Тайпей, Тайвань, 9-11 сентября 2020;
- международная конференция по математической физике "Кезеной-Ам 2016 г. Грозный, 31 октября - 3 ноября 2016;
- международная конференция по математической физике "Кезеной-Ам 2017 г. Грозный, 8-12 августа 2017;
- международная конференция «XXXVII Workshop on Geometric Methods in Physics», Беловежа, Польша, 1-7 июля 2018;
- международная конференция «Classical and Quantum Integrable Systems (CQIS-2021)», Сочи, "Сириус Россия, 26-31 июля 2021;
- международная конференция «Geometry, Groups, Operator Algebras, and Integrability 2022», МГУ, Москва, 27 июня - 2 июля 2022

- международная конференция «INdAM workshop on Poisson Geometry and Higher Structures», Istituto Nazionale di Alta Matematica, Рим, Италия, 10-14 сентября 2018

И многих других.

Публикации Основные результаты публикации опубликованы в 21 статье автора (14 из которых в журналах из списка ВАК) и одной монографии автора и полностью соответствуют следующим направлениям исследований по специальности «Дифференциальные уравнения и математическая физика» и смежной специальности «Геометрия и топология»:

- общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;
- качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;
- динамические системы, дифференциальные уравнения на многообразиях;
- симплектическая и пуассонова геометрия;
- некоммутативная геометрия и топология;
- геометрия и топология интегрируемых систем;
- деформационное квантование и его приложения.

Список этих работ приведён в конце автореферата. Все работы, кроме двух (принятых к публикации) опубликованы в рецензируемых изданиях, входящих в список ВАК.

Личный вклад Все результаты, выносимые на защиту и составляющие содержание диссертационной работы, получены соискателем лично. Результаты совместных статей, выносимые на защиту, принадлежат автору диссертации.

Структура и объём диссертации Общий объём диссертации, включая список литературы и титульный лист, составляет 185 страниц. Диссертация состоит из 3 глав:

- 1-я глава** — «Введение», состоит из двух разделов («Постановка задач» и «Содержание и основные результаты диссертации»), по несколько подразделов каждый;
- 2-я глава** — «Алгебра и геометрия полной симметрической системы Тоды», состоит из шести разделов, по несколько подразделов каждый;
- 3-я глава** — «Деформационное квантование интегрируемых систем», состоит из четырёх разделов, по несколько подразделов каждый.

Список литературы, не считая списка работ автора, 70 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава диссертации является введением и не содержит результатов, выносимых на защиту. Оставшаяся часть диссертации состоит из двух глав и списка литературы. Опишем кратко основные результаты, представленные в диссертации.

Вторая глава диссертации посвящена описанию геометрических свойств полной симметрической системы Тоды. После того, как мы перечисляем известные из других работ основные свойства этой системы, в частности, построив пуассонову структуру на пространстве симметрических матриц, мы в **разделе 2.2** даём описание диаграммы фазовых переходов полной симметрической системы в терминах порядка Брюа на группе перестановок S_n , являющейся группой Вейля для группы Ли SL_n (теоремы **2.2.12**, **2.2.13**):

Теорема. *Неподвижные точки системы Тоды находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами группы перестановок S_n ; между двумя такими точками $v, w \in S_n$ существует траектория $L(t)$ системы (то есть решение, для которого $L(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} v, L(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} w$), если и только если $w \prec v$ относительно порядка Брюа на группе S_n .*

Отметим, что при доказательстве этого утверждения мы предполагаем, что матрица начальных условий $L_0 = L(0)$ этой системы имеет простой спектр. Если это не так, утверждение следует несколько модифицировать, рассмотрев *порядок Брюа на перестановках с повторениями* (см. работу [2']).

Далее, в **параграфе 2.3** мы показываем, что аналогичное свойство остаётся верным для любой обобщенной симметрической системы Тоды. Эти обобщенные системы «живут» на симметрической части \mathfrak{p} разложения Картана

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

нормальной вещественной формы Ли комплексной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$; напомним, что здесь \mathfrak{k} — максимальная компактная подалгебра в \mathfrak{g} . Мы даём определение и описываем основные свойства этих систем как пуассоновых систем на \mathfrak{p} . Замечательным образом оказывается, что в данном случае свойства системы Тоды позволяют описать свойства системы клеток Брюа соответствующей вещественной группы Ли: тот факт, что прямая и обратная клетки Брюа комплексной полупростой группы пересекаются если и только если соответствующие элементы в группе Вейля сравнимы по порядку Брюа, был известен, в то время как аналогичное утверждение про вещественные группы Ли по какой-то причине не было опубликовано в доступных нам источниках. В результате, если в случае группы $SL_n(\mathbb{R})$ мы выводим свойства траекторий системы Тоды из свойств пересечений клеток Шуберта (так часто называют клетки Брюа для классических матричных групп; в случае группы SL_n эти клетки и их пересечения можно описать

при помощи неравенств на ранги матриц, поэтому в этой ситуации описание пересечения клеток не зависит от выбора основного поля), то в случае абстрактной вещественной группы Ли нам удаётся использовать свойства системы Тоды, чтобы описать геометрию клеток Брюа на группе: мы доказываем следующее утверждение

Предложение. *Для любой нормальной вещественной полупростой группы Ли G (то есть группы, чья алгебра Ли — нормальная вещественная форма некоторой комплексной полупростой алгебры Ли) положительная клетка Брюа X_w пересекается с отрицательной клеткой Брюа $Y_{w'}$, если и только если соответствующие элементы w, w' группы Вейля $W(G)$ сравнимы по Брюа, $w \prec w'$. При этом пересечение клеток трансверсальное.*

Оно полностью аналогично известным свойствам комплексных клеток Брюа, однако, доказательство для вещественного случая нам не удалось найти в доступной литературе.

В следующих параграфах мы обсуждаем вопросы интегрируемости симметрической системы Тоды, как обычной (связанной с группой $SL_n(\mathbb{R})$), так и обобщенных, то есть «живущих» на произвольных вещественных группах Ли. В **разделе 2.4** мы приводим конструкцию, которая позволяет по представлению старшего веса вещественной группы G построить набор инвариантов и инфинитезимальных симметрий системы Тоды. Напомним, что функция F на фазовом пространстве системы называется *инвариантом* данного уравнения, если значение F на траекториях системы постоянно. Напомним также, что векторное поле на пространстве гамильтоновой системы называется (*инфинитезимальной*) *симметрией* данной системы, если оно коммутирует с векторным полем гамильтона, задающим систему. В нашем случае нам будет удобнее рассматривать систему Тоды не на пространстве \mathfrak{p} (симметрической части разложения Картана), а на компактной группе K , соответствующей компактной подалгебре \mathfrak{k} . В ходе построения этих инвариантов мы получим (в качестве «побочного результата») точное представление алгебры \mathfrak{g} векторными полями на K . Например, для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ мы получим представление алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 векторными полями на окружности. Слегка модифицировав эту конструкцию, мы получаем коммутативное семейство векторных полей на K :

Предложение. *При указанных условиях на представления ρ_α, ρ_β и корни α и β поля $\{\mathcal{T}_{\rho_\alpha}^\alpha\}$ на K , заданные по формуле*

$$\mathcal{T}_\rho^\alpha = \frac{1}{F_\alpha^\rho} \mathcal{T}^{e_\alpha} = F_{-\alpha}^\rho \mathcal{T}^{e_\alpha},$$

где

$$\mathcal{T}^X(k) = dR_k(M(Ad_k(X))), \quad X \in \mathfrak{g}$$

и F_α^ρ — рациональная функция на K (построенная по представлению ρ и корню α), удовлетворяющая равенству

$$\mathcal{T}^\Lambda(F_\alpha^\rho) = \alpha(\Lambda)F_\alpha^\rho,$$

образуют коммутативную алгебру векторных полей на максимальной компактной подгруппе K , коммутирующих со всеми полями Тоды \mathcal{T}^Λ , $\Lambda \in \mathfrak{h}$, независимо от Λ .

Точнее говоря, данное семейство определено на открытом по Зарисскому подмножестве в K , так как по построению эти векторные поля будут рационально зависеть от точки в K . В частном случае (для группы $SL_4(\mathbb{R})$) мы показываем, что таким образом мы получаем шестимерное коммутативное семейство векторных полей на $SO_4(\mathbb{R})$ (включающее поле, соответствующее системе Тоды), что соответствует полной интегрируемости системы, согласно теореме Ли-Бьянки. Мы предполагаем, что аналогичное утверждение выполняется в общем случае.

Предпоследний раздел второй главы диссертации (**параграф 2.5**) посвящен описанию альтернативного способа построения коммутативного семейства первых интегралов полной симметрической системы Тоды на симметрических матрицах. А именно: существование большого семейства рациональных первых интегралов этой системы было известно из работы Deift, Li, Nando, Tomei. В диссертации мы приводим альтернативное построение такого семейства. Наша конструкция использует метод сдвига аргумента в инвариантах и метод проекции Адлера, Костанта и Симса, для первого из которых мы позднее опишем способ квантования (то есть, поднятия в универсальную обёртывающую алгебру или её локализацию), тем самым мы получаем набор коммутирующих элементов в $U\mathfrak{gl}_n$, которые можно назвать «квантовой полной симметрической системой Тоды». Кроме того, предложенный подход позволяет находить траектории векторных полей, соответствующих дополнительным интегралам системы Тоды при помощи «метода QR-разложения», обобщающего следующее известное утверждение

Предложение. Пусть L_0 — вещественная симметрическая матрица размера $n \times n$; рассмотрим разложение экспоненты e^{tL_0} в произведение ортогональной и верхнетреугольной матриц (получающееся, например при помощи ортогонализации Грама-Шмидта):

$$e^{tL_0} = Q(t)R(t), \quad Q(t) \in SO_n(\mathbb{R}), \quad R(t) \in B_n^+,$$

где $B_n^+ \subset GL_n(\mathbb{R})$ — подгруппа верхнетреугольных матриц. Тогда однопараметрическое семейство симметрических матриц $L(t) = Q(t)L_0Q^{-1}(t)$ является решением уравнения (0.4), $\dot{L} = [M, L]$, с начальным условием $L(0) = L_0$.

Оказывается, аналогичное утверждение можно доказать для потоков, соответствующих первым интегралам потока Тоды, построенным Deift, Li, Nando и Tomei; в этом случае достаточно заменить L_0 в экспоненте на матрицу, представляющую соответствующее поле Гамильтона в точке L_0 :

Лемма. Пусть задано начальное условие $L_0 \in \text{Sym}_d^0(\mathbb{R})$. Рассмотрим матрицу $\mathbf{I}_{k,m}(L_0) = \nabla I_{k,m}(L)$. Рассмотрим экспоненту этой матрицы и

разложим её в произведение ортогональной и верхнетреугольной матрицы:

$$e^{t\mathbf{I}_{k,m}(L_0)} = Q(t)R(t).$$

Тогда кривая $L(t) = R(t)L_0R^{-1}(t)$ в симметрических матрицах является траекторией гамильтониана «отсечения» $I_{k,m}(L)$ с начальным условием $L(0) = L_0$; иными словами, эта траектория удовлетворяет уравнению $\dot{L} = \{I_{k,m}(L), L\}$.

Заключительный раздел (**раздел 2.6**) второй главы играет роль своеобразного «мостика» между главами: он посвящён алгебраической конструкции для решений квантовой и коммутативной версий обычной («трёхдиагональной») системы Тоды. А именно, мы опишем уравнения, аналогичные системе Тоды, связывающие бесконечную цепочку некоммутативных переменных a_i, b_i . Эти уравнения естественно называть «некоммутативной открытой цепочкой Тоды» или «квантовой открытой цепочкой Тоды». Оказывается, эти уравнения можно решать при помощи некоторой индуктивной процедуры, единой для коммутативного и некоммутативного случая. Эта процедура позволяет выразить решения получившейся системы в виде отношения детерминантов ганкелевских матриц (в коммутативном случае), которое в «квантовом» случае надо заменить на *квазидетерминанты Гельфанда и Ретаха*.

Третья глава диссертации посвящена вопросу деформационного квантования динамических гамильтоновых систем, в частности симметрической полной системы Тоды.

Для начала мы, как и в предыдущей главе излагаем основные идеи и методы, которые нам потребуются при работе с дформациями пуассоновых алгебр. Теория деформаций ассоциативных алгебр, в частности, теория деформационного квантования, это довольно старый (восходящий к работам 50-х–60-х годов прошлого века) и богатый результатами и методами раздел математики. Поэтому мы в **разделе 3.1** ограничимся тем, что изложим лишь самые необходимые для нас конструкции и теоремы. Рассказ о результатах, выносимых на защиту, мы начинаем в **разделе 3.2** с обсуждения следующего общего вопроса: пусть $H_1, \dots, H_N \in C^\infty(X)$ — система первых интегралов в инволюции на пуассоновом многообразии X . Пусть задано \star -умножение на X , записанное в виде деформационного ряда

$$f \star g = fg + \frac{\hbar}{2}\{f, g\} + \sum_{k=2}^{\infty} \hbar^k B_k(f, g).$$

Чтобы найти «деформационное квантование первых интегралов H_i », то есть формальные ряды \widehat{H}_i ,

$$\widehat{H}_k = H_k + \hbar H_{k,1} + \hbar^2 H_{k,2} + \dots$$

такие, что выполняются равенства

$$\widehat{H}_i \star \widehat{H}_j = \widehat{H}_j \star \widehat{H}_i \text{ для всех } i, j = 1, \dots, N,$$

мы будем действовать индукцией по степеням формальной переменной \hbar . Рассматривая уравнения на коэффициенты $H_{k,i}$, $k = 1, \dots, N$, $i = 1, 2, \dots$ в вышеуказанных разложениях, проистекающие из условий коммутирования, мы интерпретируем их в виде условий обнуления некоторых классов когомологий в относительном комплексе Лихнеровича-Пуассона:

Предложение. *Рассмотрим пару $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, где \mathcal{A} — алгебра функций на пуассоновом многообразии с пуассоновой структурой $\{\cdot, \cdot\}$, а \mathcal{C} — пуассоново-коммутативная подалгебра в \mathcal{A} . Предположим, что пара $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ «хорошая». Тогда построенные ранее когомологические классы препятствий $B_n \in H^2(\mathcal{C}, \mathcal{A}) = \wedge^2 T_\rho^{hor} M$ будут замкнуты относительно дифференциала d_π^{hor} , а нужная нам деформация \star -умножения будет существовать, если классы когомологий B_n относительно этого дифференциала (то есть их классы в относительных когомологиях Лихнеровича-Пуассона) равны нулю.*

В некоторых случаях (например, если пуассонова структура невырожденная, и многообразие X является евклидовым пространством), это позволяет утверждать существование поднятий \widehat{H}_i , коммутирующих между собой.

В общем случае, однако, проверка этих условий весьма затруднительна. В этой ситуации вопрос о существовании деформационного квантования интегрируемой системы тесно связан с вопросом существования *эквивариантного деформационного квантования*: пусть задано представление алгебры Ли \mathfrak{g} векторными полями на пуассоновом многообразии X . Мы будем предполагать, что выбранное представление сохраняет пуассонову структуру на X , то есть¹

$$\rho(Y)(\{f, g\}) = \{\rho(Y)(f), g\} + \{f, \rho(Y)(g)\}$$

для любого элемента $Y \in \mathfrak{g}$ и любых $f, g \in C^\infty(X)$. Тогда деформационное квантование называется эквивариантным, если выполняется следующее уравнение на соответствующее \star -произведение удовлетворяет аналогичному уравнению

$$\rho(Y)(f \star g) = \rho(Y)(f) \star g + f \star \rho(Y)(g).$$

Более общо, можно предположить, что одновременно с деформацией умножения на функциях из $C^\infty(X)$ происходит деформация представления ρ : мы можем попробовать добавить к представлению ρ алгебры Ли \mathfrak{g} векторными полями последовательность линейных отображений $\rho_k : \mathfrak{g} \rightarrow Diff(X)$, $k = 1, 2, \dots$, где $Diff(X)$ обозначает алгебру дифференциальных

¹Напомним, что векторные поля, сохраняющие пуассонову структуру, называются *пуассоновыми*; в силу тождества Якоби любое поле Гамильтона является также пуассоновым.

операторов на X так, чтобы отображение $\widehat{\rho} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Diff}(X)[[\hbar]]$, заданное формулой

$$\widehat{\rho}(Y) = \rho(Y) + \hbar \rho_1(Y) + \hbar^2 \rho_2(Y) + \dots,$$

удовлетворяло условию

$$\widehat{\rho}(Y)(f \star g) = \widehat{\rho}(Y)(f) \star g + f \star \widehat{\rho}(Y)(g)$$

для всех $Y \in \mathfrak{g}$, $f, g \in C^\infty(X)$. Иными словами, образ отображения $\widehat{\rho}$ лежит в алгебре Ли $\text{Der}_{\hbar}(\mathcal{A}(X))$, \hbar -линейных дифференцирований² алгебры деформационного квантования X , $\mathcal{A}(X)$. При этом мы должны предположить дополнительно, что построенное отображение $\widehat{\rho} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}_{\hbar}(\mathcal{A}(X))$ продолжает быть представлением алгебр Ли, то есть

$$\widehat{\rho}([Y, Z]) = [\widehat{\rho}(Y), \widehat{\rho}(Z)], \quad Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Если взять в качестве алгебры Ли \mathfrak{g} алгебру гамильтоновых полей X_{H_k} , $k = 1, \dots, N$ первых интегралов H_1, \dots, H_N , то после нахождения поднятия этих полей до дифференцирований алгебры $\mathcal{A}(X)$, задача деформационного квантования динамической системы сведётся к проверке того, что для любого $k = 1, \dots, N$ дифференцирование $\widehat{\rho}(X_{H_k})$ — внутреннее, то есть задается при помощи коммутатора с некоторым элементом $\widehat{H}_k \in \mathcal{A}(X)$:

$$\widehat{\rho}(X_{H_k})(f) = \widehat{H}_k \star f - f \star \widehat{H}_k,$$

и что для разных i, j элементы $\widehat{H}_i, \widehat{H}_j$ коммутируют между собой.

Эти три задачи (построение представления $\widehat{\rho}$, поиск элементов \widehat{H}_k и проверка их коммутативности) мы обсуждаем в **разделе 3.3**. Отметим, что перечисленные проблемы решаются разными способами; например второй и третий вопросы удобно исследовать методами, аналогичными тем, которые используются в **разделе 3.2**; таким образом они сводятся к нахождению различных когомологических препятствий, которые часто можно считать равными нулю. Вопрос о существовании эквивариантного деформационного квантования более деликатный; в случае, когда действие алгебры \mathfrak{g} можно проинтегрировать до представления компактной группы, а многообразии X — симплектическое, существование такого квантования известный факт. В диссертации мы приводим несколько конструкций, выдающих необходимые или достаточные условия существования эквивариантного квантования в общем случае. В частности, мы доказываем следующее утверждение:

Предложение. Пусть X — пуассоново многообразие, $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Pois}(X)$ — представление алгебры Ли \mathfrak{g} пуассоновыми векторными полями на X . Тогда эквивариантное деформационное квантование (то есть \star -умножение на $C^\infty(X)[[\hbar]]$ и согласованное с ним представление $\widehat{\rho} : \mathfrak{g} \rightarrow$

²Линейный оператор d на алгебре A называется дифференцированием A , если он удовлетворяет тождеству Лейбница $d(ab) = da \cdot b + a \cdot db$, $\forall a, b \in A$. Пространство таких операторов является алгеброй Ли относительно операции коммутирования.

$\text{Der}(\mathcal{A}_{\hbar}(X))$ на X задаётся элементом Маурера-Картана R в ДГ алгебре Ли $C^*(\mathfrak{g}, \mathcal{D}_{poly}^*(X)[[\hbar]])[1]$, таким, что

$$R = \hbar(\chi_{HKR}(\pi) + \rho_1) + o(\hbar)$$

для некоторого $\rho_1 \in C^{1,1}(\mathfrak{g}, X)$ и для которого часть биградуировки $(2, 0)$ равна нулю.

Если мы хотим, чтобы представление было согласовано с данным заранее \star -произведением, заданным деформационным рядом с коэффициентами B_k , то надо добавить условие

$$R^{0,2} = \sum_k \hbar^k B_k.$$

Вопрос о том, в каком случае эти условия будут выполняться, остается пока неразрешенным.

В заключительном разделе **главы 3** мы исследуем способы «поднятия в квантовую алгебру» одной частной конструкции, использующейся для построения коммутативных подалгебр в алгебре Пуассона. Речь идёт об уже упоминавшемся *методе сдвига аргумента* или *методе сдвига инвариантов*. Напомним основную идею этого метода, являющегося частным случаем *метода бигамильтоновой индукции Леннарта и Магри*.

Пусть X — пуассоново многообразие, ξ — векторное поле на X , удовлетворяющее следующему условию:

$$\xi(\{f, g\}) - \{\xi(f), g\} - \{f, \xi(g)\} = \{f, g\}_\xi \neq 0, \quad (**)$$

но

$$\xi(\{f, g\}_\xi) - \{\xi(f), g\}_\xi - \{f, \xi(g)\}_\xi = 0. \quad (***)$$

Пусть f, g — две функции Казимира для скобки Пуассона $\{, \}$. Тогда для любых целых чисел $p, q \in \mathbb{Z}_+$ выполняется равенство

$$\{\xi^p(f), \xi^q(g)\} = 0.$$

Доказательство этого факта несложно провести индукцией по p, q . Важным частным случаем этой конструкции, ставшим первым примером такого рода, является ситуация, когда $X = \mathfrak{g}^*$, скобка Пуассона на X задана формулой (*), а векторное поле ξ имеет постоянные коэффициенты:

$$\xi(f) = \sum_k \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad \xi_k \in \mathbb{C}.$$

В этом случае можно проверить, что скобка $\{f, g\}_\xi$ задаётся по формуле

$$\{f, g\}_\xi = \sum_{k,i,j=1}^N \xi_k C_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

то есть эта скобка имеет постоянные коэффициенты, а следовательно условия (**), (***) выполняются. Заметим, что итерированные производные функции f вдоль поля ξ в рассмотренном случае равны коэффициентам разложения Тейлора для выражения $f(x + t\xi)$ (мы можем интерпретировать поле ξ как элемент касательного пространства $T\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}^*$):

$$f(x + t\xi) = f(x) + \frac{t^1}{1!}\xi(f)(x) + \frac{t^2}{2!}\xi^2(f)(x) + \dots + \frac{t^k}{k!}\xi^k(f)(x) + \dots$$

То, что элементы этого разложения для функций Казимира на (двойственном пространстве к) алгебре Ли будут коммутировать между собой впервые заметил Манаков на примере обобщенного уравнения Эйлера (его иногда называют «уравнением Эйлера-Арнольда»); общий случай двойственных пространств к алгебрам Ли был впервые исследован Мищенко и Фоменко.

В настоящей диссертации мы будем прежде всего интересоваться частным случаем конструкции сдвига инвариантов на алгебре Ли, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_d$. В этой ситуации мы будем исследовать следующий вопрос: *Существует ли оператор $\hat{\xi}$ на универсальной обертывающей алгебре $U\mathfrak{gl}_d$ такой, что для него выполняется уравнение*

$$[\hat{\xi}^p(f), \hat{\xi}^q(g)] = 0, \quad (\star)$$

для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$ и f, g из центра универсальной обертывающей алгебры $U\mathfrak{gl}_d$?

Ответ на этот вопрос оказывается положительным: в некоторых случаях, по крайней мере, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_d$, такой оператор $\hat{\xi}$ на самом деле существует. А именно, в качестве $\hat{\xi}$ можно выбрать оператор квазидифференцирования по направлению ξ . Мы описываем такие операторы в **разделе 3.4**; они порождаются частными операциями квазидифференцирования Гуревича, Пятова и Сапонова алгебры $U\mathfrak{gl}_d$. Первоначальное определение квазидифференцирования было аксиоматическим. Однако, как оказалось, такие операции можно определять при помощи алгебраических конструкций на универсальных обертывающих алгебрах и представлений алгебры Ли, удовлетворяющих определённым условиям. В **разделе 3.4** мы обсуждаем различные способы определить операторы квазидифференцирования, а также связь этих операторов с операциями на алгебрах полиномиальных и гладких функций на \mathfrak{gl}_d^* и на GL_d . После этого, в **разделе 3.5** мы докажем, что для построенных операций выполняется равенство (\star) :

Теорема. *Для любых $f, g \in \mathcal{Z}(U\mathfrak{gl}_d)$ и любой матрицы коэффициентов $\Xi = (\xi_i^j) \in Mat_d(\mathbb{k})$ выполняется равенство*

$$[\hat{\xi}^p(f), \hat{\xi}^q(g)] = 0, \text{ для любых } p, q \geq 0.$$

Здесь $\hat{\xi} : U\mathfrak{gl}_d \rightarrow U\mathfrak{gl}_d$ — оператор, заданный формулой

$$\hat{\xi} = \sum_{i,j=1}^d \xi_j^i \hat{\partial}_i^j = \text{tr}(\Xi \hat{D}),$$

где \hat{D} — матрица частных квазипроизводных,

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \hat{\partial}_1^1 & \dots & \hat{\partial}_d^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\partial}_1^d & \dots & \hat{\partial}_d^d \end{pmatrix}.$$

Это свойство позволяет, в частности, построить квантование уравнений Эйлера-Арнольда и симметрической системы Тоды.

Благодарности: Автор хотел бы выразить благодарность своим коллегам и соавторам, дискуссии с которыми помогли ему сформулировать и доказать теоремы, представляемые к защите. Прежде всего это Дмитрий Талалаев, Юрий Черняков, Александр Сорин, Владимир Рубцов, Владимир Ретах, Ирина Боброва и мой аспирант Ясуси Икэда. В немалой степени я обязан своими достижениями той дружественной атмосфере, которая сложилась на кафедре Дифференциальной геометрии и приложений МГУ им. Ломоносова, способствовавшей моим занятиям; я рад воспользоваться этой возможностью чтобы выразить свою огромную признательность коллегам, прежде всего, заведующему кафедрой, академику Анатолию Тимофеевичу Фоменко. Я также благодарен профессору, члену-корреспонденту РАН Виктору Матвеевичу Бухштаберу за внимание и дружеские советы, которые он давал мне по поводу содержания диссертации. Часть этой работы была написана во время моего визита в Пекинский Университет, и я признателен сотрудникам этого университета за прекрасные условия для работы. Наконец, я хочу поблагодарить свою жену Лизу и дочек Клаву и Фросю за их многолетние терпение и поддержку.

Список литературы

- [1'] Yu. Chernyakov, G. Sharygin, A. Sorin, *Bruhat order in general Toda system* Commun. Math. Phys. **330** 1 (2014) 367–399
- [2'] Yu. Chernyakov, G. Sharygin, A. Sorin, *Bruhat Order in the Full Symmetric \mathfrak{sl}_n Toda Lattice on partial flag spaces* SIGMA **12** (2016) 084, 25 pages (см. <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2016/084/sigma16-084.pdf>)
- [3'] Yu. Chernyakov, G. Sharygin, A. Sorin, D. Talalaev *Toda flow and intersections of Bruhat cells* SIGMA **16** (2020) 115, 8 pages (см. <https://www.emis.de/journals/SIGMA/2020/115/sigma20-115.pdf>)
- [4'] А. С. Сорин, Ю. Б. Черняков, Г. И. Шарыгин, *Векторные поля и инварианты полной симметрической системы Тоды* Теор. и мат. физика, **216** 2 (2023) 271–290
- [5'] Д. В. Талалаев, Ю. Б. Черняков, Г. И. Шарыгин, *Полная симметрическая система Тоды: решение системы с помощью метода QR-разложения* Функц. анализ и прил., **57** 4 (2023) 100–122
- [6'] Yu. Chernyakov, G. Sharygin, A. Sorin, *Phase portraits of the generalized full symmetric Toda systems on rank 2 groups* Теоретическая и математическая Физика **193** 2 (2017) 193–213
- [7'] Yu. Chernyakov, G. Sharygin, A. Sorin, *Bruhat order in the Toda system on $so(2,4)$: an example of non-split real form* Journ. of Geom. and Phys. **136** (2019) 45–51
- [8'] G. Sharygin, D. Talalaev, *Deformation quantisation of integrable systems* Journ. of Noncommutative Geometry **11** 2 (2017) 741–756
- [9'] G. Sharygin, *Deformation quantization and the action of Poisson vector fields* Lobachevskii Journ. of Mathematics **38** 6 (2017) 1093–1107
- [10'] А. Конаев, G. Sharygin, *Survey of the Deformation Quantization of Commutative Families*; в книге *Recent developments in Integrable Systems and related topics of Mathematical Physics, Kezenoi-Am, Russia 2016* (Editors: Buchstaber, Victor M., Konstantinou-Rizos, Sotiris, Mikhailov, Alexander V.) серия Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer 2018
- [11'] G. Sharygin, *Deformation Quantization of Commutative Families and Vector Fields*; в книге *XXXVII Workshop on Geometric Methods in Physics, Białowieża 2018*, серия Trends in Mathematics, Springer Nature, 2019; 100–120
- [12'] G. Sharygin, *L_∞ -derivations and the argument shift for deformation quantization algebras* Acta Mathem. Spalatensia, **1** (2020) 53–78

- [13'] G. Sharygin, *Quasi-derivations on $U\mathfrak{gl}_n$ and the argument shift method* Contemp. Math., (conference dedicated to the 80th anniversary of prof. Vinogradov) **723** (2023) 197–208
- [14'] Г. И. Шарыгин *Квазидифференцирования алгебры $U\mathfrak{gl}_n$ и квантовые алгебры Мицценко-Фоменко*, Функци. анализ и его прил., **58:3** (2024), 121–139
- [15'] Y. Ikeda, G. Sharygin, *The argument shift method in universal enveloping algebra $U\mathfrak{gl}_d$* , Journ. of Geom. and Physics, **195**, (2024) 105030
- [16'] G. Sharygin, D. Talalaev, *On the Lie-formality of Poisson manifolds* Journ. of K-theory **2** Special Issue 02 (2008) 361–384
- [17'] V. Retakh, V. Rubtsov, G. Sharygin, *Noncommutative Cross-Ratio and Schwarz Derivative*, в сборнике *Integrable systems and algebraic geometry (dedicated to Emma Previato)*, vol 2. LNS 459 487–516 (2020)
- [18'] I. Bobrova, V. Retakh, V. Rubtsov, G. Sharygin, *A fully noncommutative analog of the Painlevé IV equation and a structure of its solutions* Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **55** (2022) 1–30
- [19'] I. Bobrova, V. Retakh, V. Rubtsov, G. Sharygin, *Non-Abelian discrete Toda chains and related lattices*, Physica D: Nonlinear Phenomena, **464** (2024) 134200
- [20'] Y. Ikeda, A. Molev, G. Sharygin, *On the quantum argument shift method*, принято к публикации в журнале Commun. in Algebra; см. также [arXiv:2309.15684](https://arxiv.org/abs/2309.15684)
- [21'] G. Sharygin, *Lectures on deformation quantization: from Moyal product to Kontsevich's formality theorem*, World Scientific, Singapore, 2025; ISBN: 978-981-12-9780-9
- [22'] Yu. Chernyakov, G. Sharygin, *Full symmetric Toda system and vector fields on the group $SO_n(\mathbb{R})$* , принято к печати в Journal of Geom. and Physics