

Серкова Ольга Игоревна

Остовные подграфы и перколяция в случайном графе

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Долгопрудный – 2025

Работа прошла апробацию в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: Жуковский Максим Евгеньевич – доктор физико-математических наук, доцент

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Адыгейский государственный университет»

Защита состоится 16 декабря в 14:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.1.1.5.015, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» (МФТИ, Физтех)

по адресу: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МФТИ, Физтех и на сайте организации <https://mipt.ru>

Автореферат разослан «__» _____ 2025 г.

**Ученый секретарь
диссертационного совета**

Серкова Ольга Игоревна

Остовные подграфы и перколяция в случайном графе

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Долгопрудный – 2025

Работа прошла апробацию в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: **Жуковский Максим Евгеньевич – доктор физико-математических наук, доцент**

Ведущая организация: **«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»**

Защита состоится _____ на заседании диссертационного совета _____, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» (МФТИ, Физтех)

по адресу: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МФТИ, Физтех и на сайте организации <https://mipt.ru>

Автореферат разослан «__» _____ 2025 г.

**Ученый секретарь
диссертационного совета**

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена теме поиска остовных подграфов в случайных графах, а также явлению перколяции в случайных графах.

Актуальность темы исследования. На протяжении веков человечество интересуется комбинаторными свойствами различных структур. Одной из таких структур является граф.

С помощью графов моделируются дорожные и социальные сети, ссылки на веб-страницах в Интернете, биологические сети. Формализация графовых свойств, изучения взаимосвязей этих свойств и графовых характеристик помогают, в частности, создавать эффективные алгоритмы работы с ними.

Часто графы, с которыми приходится работать, настолько большие, что проверка тех или иных свойств на практике занимает огромное время или в принципе невозможна, несмотря на современные вычислительные мощности. Особенно актуально это сейчас, так как XXI век характеризуется беспрецедентным ростом объема и сложности сетевых структур. Социальные взаимодействия, Интернет, нейронные связи мозга, финансовые транзакции, биологические системы — в эпоху больших данных эти явления формируют невероятно сложные сети огромного размера. Традиционные методы анализа, рассчитанные на детерминированные и ограниченные графы, сталкиваются с вычислительными и концептуальными трудностями при работе с такими масштабами и неопределенностью. В частности, эти сложности обусловлены тем фактом, что большинство задач определения свойств графа (например, задача коммивояжера, обнаружение клик заданного размера или проверка свойств раскрашиваемости) являются NP-трудными.

Но обязательно ли проверять конкретный большой граф на выполнение свойства? Может быть, большинство графов этим свойством обладают, и тогда можно просто работать в предположении, что оно выполняется? Это соображение является мотивацией к изучению так называемых случайных графов. Случайный граф — это случайный элемент на множестве графов конкретного размера, который задается различными моделями (подходящая подбирается под задачу). Чаще всего нас интересует поведение случайного графа при $n \rightarrow \infty$, так как при очень большом размере сети ее свойства практически не зависят от размера. Если мы сможем доказать, что случайный граф с очень большой вероятностью обладает каким-то свойством, то на практике можно пользоваться тем, что и у конкретного графа свойство, скорее всего, выполняется, и избежать необходимости проверки.

Понятие случайного графа начало активно использоваться в середине XX века. В 1959 году Эрдеш предложил принципиально новый подход к изучению графовых свойств, заложив основы вероятностного метода. Его

ключевая идея заключалась в использовании случайного графа как инструмента доказательства: если определенное комбинаторное свойство выполняется с ненулевой вероятностью в подходящей случайной модели, то это доказывает существование хотя бы одного детерминированного графа, обладающего этим свойством. Этот метод позволил обойти необходимость явного конструирования сложных объектов, открыв новые пути в экстремальной комбинаторике.

Работы Эрдеша не просто предложили полезный инструмент, но и стимулировали глубокое изучение случайных графов как самостоятельных математических объектов. Исследования, начатые в 1960-70-х годах, особенно детальный анализ эволюции графа Эрдеша-Реньи при добавлении рёбер, выявили поразительное явление — резкие фазовые переходы, роднящие теорию случайных графов со статистической физикой. Было обнаружено, что при плавном изменении параметра (например, вероятности появления ребра) глобальные свойства графа претерпевают качественные скачки в узком критическом интервале, аналогичные фазовым переходам в веществе (например, переходу жидкость-газ или возникновению спонтанной намагниченности в модели Изинга).

Наиболее знаменитый пример в графах — внезапное возникновение гигантской связной компоненты, поглощающей значительную долю вершин при переходе критического порога плотности рёбер. Этот феномен имеет прямую аналогию с перколяционным переходом в решётках.

Оказалось, что подобные результаты верны для всех так называемых монотонных (возрастающих и убывающих) свойств. Свойство графа возрастает, если его выполнение сохраняется при добавлении рёбер. Аналогичным образом определяются убывающие свойства. В частности, любое дополнение к возрастающему свойству является убывающим, и наоборот. Подавляющее большинство естественных структурных характеристик графов — связность, наличие различных подграфов, таких как треугольники, клики, циклы, гамильтоновы пути — являются монотонными. Как заметили Боллобаш и Томасон в 1987 году, монотонность влечет феномен резких фазовых переходов, о которых писалось выше: при переходе через p_0 вероятность свойства изменяется от почти 0 к почти 1 в узком интервале значений параметра вероятности проведения ребра p .

Систематическое изучение пороговых вероятностей для различных монотонных свойств стало центральным направлением теории случайных графов. Фундаментальные труды Боллобаша, Томасона, Фридгута и других учёных установили строгую классификацию порогов (точные, грубые, локальные, нелокальные) — моментов, начиная с которых свойство почти всегда выполняется — и углубили понимание универсальных механизмов этих критических явлений, общих для случайных графов и физических систем.

Наступление эпохи больших данных в XXI веке кардинально повысило прикладную значимость теории случайных графов. Случайные графы (модель Эрдеша-Реньи, стохастические блок-модели, конфигурационные модели)

предоставили мощный математический аппарат для анализа сложных гигантских структур, абстрагируясь от специфики деталей, но улавливая существенные статистические закономерности.

В этом контексте поиск и анализ заданных подграфов случайного графа перестает быть чисто теоретической задачей. Обнаружение специфических паттернов — треугольников, клик и других заданных конфигураций — является важным инструментом для анализа реальных сетей.

Теперь непосредственно поговорим об актуальности задач, изучаемых в диссертации.

Особое место в теории случайных графов занимает исследование остовных подграфов — подструктур, охватывающих все вершины графа. Эти объекты представляют фундаментальный интерес, поскольку определяют глобальную связность и топологические свойства сети. Исторически одной из первых ключевых задач этого класса стал поиск гамильтонова цикла — цикла, проходящего через каждую вершину графа ровно один раз.

В модели случайного графа Эрдёша-Реньи $G(n, p)$ каждое ребро между парой вершин из n -вершинного множества проводится с вероятностью $p = p(n)$. Пороговой вероятностью для возрастающего свойства называется такое $p_0 = p_0(n)$, что при $p/p_0 \rightarrow \infty$ с вероятностью, стремящейся к единице с ростом n , свойство выполняется, а при $p/p_0 \rightarrow 0$ — не выполняется с вероятностью, стремящейся к единице. Аналогично можно определить это понятие и для убывающих свойств (предел меняется, наоборот, с 1 на 0).

В 1960 году Эрдеш и Реньи сформулировали принципиальный вопрос: при какой пороговой вероятности p случайный граф $G(n, p)$ начинает содержать гамильтонов цикл? Решение, полученное Поша лишь в 1976 году (а также улучшенное Коршуновым, Комлошем и Семереди), стало вехой, продемонстрировавшей возможность точного предсказания сложных глобальных свойств через вероятностные параметры.

Обобщением гамильтонова цикла является k -я степень гамильтонова цикла. Это цикл на всех вершинах графа такой, что ребрами соединены не только соседние вершины, но и из каждой вершины ребра идут в k предыдущих вершин цикла. Не так давно были найдены (Кюном и Остгусом, а также Нараянаном с соавторами) пороговые вероятности для вхождения степеней гамильтонова цикла в случайный граф. Доказательства этих результатов сложны и существенно используют специфические свойства k -ых степеней циклов. Таким образом, они не позволяют непосредственным образом получить соответствующие результаты для хоть сколь-нибудь более широкого класса остовных подграфов. Одной из основных задач данной работы является нахождение пороговой вероятности вхождения заданного подграфа в случайный граф для широкого класса остовных подграфов. В частности, мы рассматриваем k -вырожденные графы, которые также можно считать обобщением деревьев: их можно представить в виде последовательности вершин, где ребра идут в не более, чем k каких-то более

ранних вершин, но не обязательно в предыдущие, как это происходит в случае k -ой степени пути.

Другим вопросом, который логично вытекает из текущего состояния области, является вопрос о максимальной степени гамильтонова цикла, содержащейся в случайном графе. Этот вопрос, фактически, является "обратным" к нахождению пороговой вероятности.

Риордан получил результат, который позволяет доказывать, что некий остовный подграф содержится в случайном графе, для очень широкого класса подграфов и некоторых принципиальных условиях на вероятность ребра. Однако применение теоремы Риордана не всегда возможно или может не давать хорошие результаты в силу ограничений на вероятность ребра. Например, в задаче о максимальной степени гамильтонова цикла результат Риордана дает достаточно грубую оценку. Значительная часть диссертационной работы посвящена усилению результата Риордана, позволяющему ослабить ограничения на вероятность проведения ребра p .

Еще более сложной проблемой является задача нахождения точной пороговой вероятности в ситуациях, когда она существует — иными словами, такой последовательности $p_0 = p_0(n)$, что свойство графа еще более резко меняет свою выполнимость в окрестностях p_0 — достаточно умножить p_0 на константу большую или меньшую единицы, чтобы свойство начало или перестало выполняться с высокой вероятностью. Методы из перечисленных выше работ часто оказываются не достаточно аккуратны для нахождения точной пороговой вероятности. Так, например, на разрешение гипотезы о точной пороговой вероятности для второй степени гамильтонова цикла ушло более пяти лет. В настоящей диссертационной работе мы уделяем внимание и этому классу задач.

Как отмечалось ранее, понятие пороговой вероятности также тесно связано с перколяционным переходом в физике. В физике и химии перколяция обозначает скачкообразное изменение свойств материала в ситуациях, связанных, например, с протеканием или непротеканием жидкости через пористые материалы, а также в других подобных ситуациях, например, при протекании или непротекании тока. Также явление перколяции возникает в фармацевтике, а теория перколяции позволяет ответить на некоторые вопросы из области вирусологии и экологии.

На математическом языке теория перколяции занимается описанием возникновения связных структур в случайных средах, которые обычно моделируются в виде дискретной решетки. Сходную задачу можно рассматривать не только для решеток, но и для произвольных случайных графов.

Процессом бутстрэп-перколяции будем называть процесс добавления ребер в некоторый граф F так, что при каждом добавлении ребра появляется новая копия некоего заданного графа H (содержащая это ребро), пока мы не получим граф G . В этом случае граф H называется шаблоном, а минимальное число ребер в графе F таком, что из него с помощью этого процесса можно получить граф G , называется числом слабой насыщенности $wsat(G, H)$. Эта величина отражает

критический минимум структурных связей, необходимых для гарантированного появления целевой конфигурации в процессе роста графа. Это понятие было впервые введено Боллобашем в 1968 году и с тех пор активно изучается.

Активной областью исследования в последние два десятилетия является перенесение экстремальных свойств графов на их случайные подграфы. Так, например, ведется поиск классов графов, для которых число слабой насыщенности случайного графа с некоторой вероятностью ребра является стабильным, то есть совпадает с числом для полного графа. Другой логично возникающий вопрос: при какой вероятности ребра число слабой насыщенности стабильно для какого-то конкретного шаблона? Обеим задачам тоже уделяется внимание в диссертации.

Степень разработанности темы. Объектом изучения диссертации являются случайные графы. Граф — это математический объект, который позволяет описывать любые системы, в которых есть попарные связи между элементами. Формально, граф — это пара $G = (V, E)$, где V — множество вершин графа, а E — множество ребер. Каждое ребро — это неупорядоченная пара $\{a, b\}$, где $a, b \in V$. В диссертации рассматриваются графы без петель, то есть предполагается, что каждое ребро $\{a, b\}$ удовлетворяет $a \neq b$.

Рассмотрим множество графов на n вершинах. Зададим каждому графу какую-то вероятность. Получившаяся структура, где каждому графу сопоставлена его вероятность, и называется случайным графом.

В реальных структурах, которые мы хотим научиться описывать, некоторые типы конфигураций встречаются чаще, а другие — реже. Например, на карте метро редки ситуации, когда у какой-то станции очень много соседей. А вот в социальной сети, наоборот, у каких-то людей гигантское число друзей, а у других — очень мало. Для описания различных реальных структур подходят различные модели случайных графов.

Перечислим наиболее изученные модели:

- Биномиальная модель. Случайным графом $G(n, p)$ называется случайный элемент множества графов на n вершинах, где каждое ребро проведено с вероятностью $p = p(n)$.
- Равномерная модель. Случайным графом $G(n, m)$ называется случайный элемент множества графов с n вершинами и $m = m(n)$ ребрами, выбранный случайно и равновероятно.

Большинство известных результатов в области получено именно для биномиальной и равномерной моделей, и именно эти модели называют в узком смысле случайными графами. Стоит отметить, что существуют и другие модели, которые в некоторых ситуациях лучше подходят для описания реальных сетей.

Впервые случайные графы использовали Дженнингс и Морено в 1938 году в статье по статистической социологии, в которой авторы сравнивали

экспериментальную социальную сеть со случайной. Их случайная сеть позже оказалась биномиальной моделью $G(n, p)$. Также, еще до создания теории, случайные графы применили Соломофф и Рапорт в статье 1951 года, где представили мозг в виде случайной сети. Авторы использовали другую модель случайного графа — граф с фиксированной степенью вершины, где соседи выбирались равновероятно.

Также в 1959 году случайный граф появляется в математической статье знаменитого венгерского математика Эрдеша в рамках применения вероятностного метода, одного из подходов в дискретной математике. А основы математической теории случайных графов были заложены в том же 1959 году им же и Реньи и независимо от них Гильбертом.

Гильберт в статье «Random graphs» предложил модель $G(n, p)$ и изучал вероятность ее связности. Интересно, что автор разработал эту модель с конкретной прикладной целью: он предлагал использовать ее в качестве описания телефонной сети. Гильберт работал в телефонной компании Белла и хотел найти вероятность того, что в случае отказа каких-то линий сети (непроведенные ребра) все еще можно будет направить звонки между двумя точками. Эрдеш и Реньи в своей статье «On random graphs» ввели модель $G(n, m)$ и рассмотрели вопрос связности, а также некоторые вопросы о количестве компонент связности в этом графе. Их статьи заложили фундамент современной науки о случайных графах и привлекли к ней интерес других исследователей.

В научной литературе активно исследуются специализированные модели случайных графов, адаптированные для анализа конкретных типов сетевых структур. К таким структурам относятся социальные сети, биологические системы и транспортные инфраструктуры. Особое внимание уделяется моделированию интернет-топологий, где в качестве математической абстракции используются веб-графы — ориентированные графы, в которых вершины соответствуют веб-страницам, а ребра отображают гипертекстовые ссылки между ними.

Диссертационная работа посвящена исключительно классической биномиальной модели, о которой и пойдет речь дальше. Стоит отметить, что при некоторых достаточно широких условиях на вероятность ребра выполнимость свойств в биномиальной и равномерной модели эквивалентна в асимптотическом смысле.

Значительный объем исследований охватывает разнообразные задачи: распределение малых подграфов (Эрдеш, Реньи, Шургер, Боллобаш, Палка, Барбур и др.), распределение числа деревьев (Эрдеш, Реньи, Боллобаш, Барбур и др.), связность (Гильберт, Остин, Эрдеш, Реньи, Степанов, Коваленко, Ивченко, Медведев, Боллобаш и др.), свойства гигантской компоненты (Лучак, Вирман, Боллобаш, Эрдеш, Реньи и др.), условия гамильтоновости (Палясти, Перепелица, Мун, Райт, Комлош, Семереди, Пош, Коршунов и др.), длину максимального пути при (Айтаи, Комлош, Семереди, де ла Вега, Боллобаш, Фенне, Фриз и др.), а также распределение диаметра (Хоффман, Синглтон,

Дэмерелл, Бэннэй, Ито, Фридман, Эрдеш, Реньи, Боллобаш и др.).

Для дальнейшего изложения нам придется формализовать понятие графового свойства. Каждый граф (неслучайный) может обладать или не обладать какими-либо свойствами. Например, он может быть связным, содержать цикл или треугольник (цикл длины три). Формально свойством графа будем называть некоторое множество графов (графы из этого множества обладают этим свойством). Будем говорить, что свойство графа выполняется асимптотически почти наверное (а.п.н.), если вероятность выполнения этого свойства стремится к 1 с ростом n к бесконечности.

Свойство графа Q называется возрастающим, если для любого графа G и для любого H такого, что G является его остовным подграфом, из $G \in Q$ следует $H \in Q$, т.е. при добавлении ребер свойство сохраняется. Свойство Q называется убывающим, если для любого графа G и для любого остовного $H \subseteq G$, из $G \in Q$ следует $H \in Q$, т.е. при убавлении ребер свойство сохраняется.

Пороговой вероятностью возрастающего свойства называется такое $p_0 = p_0(n)$, что при $p/p_0 \rightarrow \infty$ свойство а.п.н. выполняется, а при $p/p_0 \rightarrow 0$ свойство а.п.н. не выполняется. Точной пороговой вероятностью возрастающего свойства называется такое $p_0 = p_0(n)$, что $\forall \varepsilon > 0$ при $p \geq (1 + \varepsilon)p_0$ свойство а.п.н. выполняется, а при $p \leq (1 - \varepsilon)p_0$ свойство а.п.н. не выполняется. Аналогично эти понятия определяются и для убывающих свойств (выполнимость при маленьких и больших p меняется местами).

Уже в своей основополагающей работе об эволюции случайного графа Эрдеш и Реньи сформулировали понятие пороговой вероятности. Нетрудно понять, что для нетривиального возрастающего свойства Q и для каждого фиксированного n растёт $P(G(n, p) \in Q)$ возрастает при увеличении p . Поэтому существует единственное решение $p_c(Q)$ уравнения $P(G(n, p) \in Q) = \frac{1}{2}$. В 1987 году Боллобаш и Томасон доказали, что а.п.н. $G(n, p) \in Q$, если $p/p_c(Q) \rightarrow \infty$, и а.п.н. $G(n, p) \notin Q$, если $p/p_c(Q) \rightarrow 0$, то есть $p_c(Q)$ является пороговой вероятностью. Фридгут показал, что для возрастающих свойств существование пороговой вероятности, но не точной пороговой вероятности, равносильно тому, что в случайном графе содержится некоторый подграф ограниченного размера. С тех пор значения $p_c(Q)$ для возрастающих свойств Q исследовались в многочисленных работах. Однако общего решения пока не найдено.

Тем не менее для произвольного возрастающего свойства Q значение $p_c(Q)$ можно найти с точностью до логарифмического множителя, используя понятие порога математического ожидания. Под порогом $p_e(Q)$ математического ожидания подразумевается максимальное значение p , такое что существует множество графов Q' , удовлетворяющее условию $\sum_{G \in Q'} p^{|e(G)|} \leq \frac{1}{2}$ и $Q \subseteq \langle Q' \rangle$,

где количество ребер в графе G обозначено $e(G)$, а $\langle Q' \rangle$ — это замыкание Q' вверх. Иными словами, $\langle Q' \rangle$ содержит все графы, которые содержат хотя бы один остовный подграф из Q' . По неравенству Маркова $p_e(Q) \leq p_c(Q)$. Парк и Фам показали, что существует $C > 0$ такое, что для любого возрастающего свойства

Q выполняется $p_c(Q) \leq Cp_e(Q) \cdot \log n$.

Риордан описал широкий класс возрастающих свойств Q , для которых логарифмический множитель в неравенстве, полученном Парк и Фам, отсутствует, тем самым установив асимптотический порядок величины $p_c(Q)$. Ниже мы приводим формулировку этого замечательного результата.

Здесь и далее $v(H)$ — количество вершин в графе H , $e(H)$ — количество ребер в графе H , $c(H)$ — количество компонент в графе H , $N = C_n^2$.

Теорема 1 (Риордан). Пусть $H = H(n)$ — граф на n вершинах с максимальной степенью $\Delta = \Delta(n)$. Положим $\alpha = e(H)/N$ и

$$\gamma = \sup_{H' \subseteq H, v(H') \geq 3} \frac{e(H')}{v(H') - 2}.$$

Пусть, кроме того, $p = p(n) \in (0, 1)$. Если

1. $\alpha N \geq n$,
2. $pN, (1-p)\sqrt{n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$,
3. $np^\gamma/\Delta^4 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$,

то $G(n, p)$ а.п.н. содержит подграф, изоморфный H .

Одной из наиболее изученных задач в области остовных подграфов случайного графа является поиск гамильтонова цикла и его степеней. Вопрос о пороговой вероятности для гамильтонова цикла был поставлен еще в 1960 году Эрдешем и Реньи. В 1976 году наконец-то ответ был получен Поша. Другие доказательства и улучшения были представлены в статьях Коршунова и др. Оказалось, что пороговая вероятность появления гамильтонова цикла в случайном графе равна $\frac{\log n}{n}$.

Из результата Риордана следует, что при $k \geq 3$ и $p \gg n^{-\frac{1}{k}}$ случайный граф содержит k -ю степень гамильтонова цикла. При этом в силу того, что $p_c \geq p_e$, нетрудно заметить, что $((1-o(1))e/n)^{1/k}$ является нижней оценкой пороговой вероятности p_c при $k \geq 3$. Таким образом, для $k \geq 3$ асимптотика пороговой вероятности известна и равна $\Theta(n^{-1/k})$.

Однако для $k = 2$ между верхней оценкой $n^{-\frac{1}{3}}$ и нижней $n^{-\frac{1}{2}}$ оставался большой зазор. Д. Кюн и Д. Остгус показали в 2012 году, что если $p \geq n^{-1/2+\varepsilon}$, то а.п.н. случайный граф содержит вторую степень гамильтонова цикла. Проблема была окончательно решена в статье 2021 года Кана, Нараянана и Парк. Авторы доказали, что пороговая вероятность на самом деле равна $n^{-\frac{1}{2}}$.

Однако «обратный» вопрос — какова максимальная степень k такая, что в случайном графе а.п.н. существует k -я степень гамильтонова пути, — при произвольном p изучен плохо. Пожалуй, наиболее естественным и сложным этот вопрос является при постоянной вероятности проведения ребра, в частности при

$p = 1/2$. Насколько хорошо сконцентрировано значение максимальной степени гамильтонова цикла в случайном графе и в каком диапазоне?

Нетрудно показать с помощью неравенства Маркова, что при $k > \log_2 n$ в графе $G(n, 1/2)$ а.п.н. нет k -й степени гамильтонова цикла. В случае произвольного фиксированного $p \in (0, 1)$ можно получить верхнюю оценку на максимальную степень гамильтонова цикла $\log_{\frac{1}{p}} n$, то есть основание логарифма в оценке зависит от p . Таким образом, верхнюю оценку на максимальную степень гамильтонова цикла получить легко, чего не скажешь о нижней. В рамках диссертации рассматривается вопрос нахождения нижней оценки.

Другим частным случаем остовных подграфов являются k -вырожденные графы. Для таких графов можно из теоремы 1 вывести результаты о пороговой вероятности. Тем не менее вопрос о значении точной пороговой вероятности для произвольного k -вырожденного подграфа остается открытым.

Недавно были получены результаты, показывающие, что точная пороговая вероятность для k -й степени гамильтонова цикла, который является частным случаем k -вырожденного графа, равна $(e/n)^{1/k}$, при любом $k \geq 2$.

Что касается области бутстрэп-перколяции, то она начала свое развитие с работ Боллобаша 1968 года, где он ввел понятие слабой насыщаемости.

Точное значение $\text{wsat}(K_n, K_s)$ было получено независимо Алоном, Франклом, Калаи, также его можно вывести из более ранней работы Ловаса, и позже еще одно доказательство было получено Ю.

Значение $\text{wsat}(K_n, K_{s,t})$ для произвольных параметров все еще неизвестно, но есть результаты в частных случаях. Калаи установил, что

$$\text{wsat}(K_n, K_{t,t}) = (t-1)(n+1-t/2)$$

при условии $n \geq 4t-4$. Обобщение было получено Кроненберг, Мартинс и Моррисон в 2020 году. Они заново доказали, что

$$\text{wsat}(K_n, K_{t,t}) = (t-1)(n+1-t/2),$$

если $t \geq 2$ и $n \geq 3t-3$. Более того, они доказали аналогичный результат для $K_{t,t+1}$:

$$\text{wsat}(K_n, K_{t,t+1}) = (t-1)(n+1-t/2) + 1,$$

если $t \geq 2$ и $n \geq 3t-3$. Также они получили оценки для произвольных параметров s, t :

$$\text{wsat}(K_n, K_{s,t}) \leq (s-1)(n-s) + C_t^2 \quad (1)$$

если $t > s \geq 2$ и $n \geq 2(s+t) - 3$ и

$$\text{wsat}(K_n, K_{s,t}) \geq (s-1)(n-t+1) + C_t^2 \quad (2)$$

если $t > s \geq 2$ и $n \geq 3t-3$. Для $s = 1$ точное значение числа слабой

насыщаемости получается с помощью несложных рассуждений, которые мы позже приведем в тексте диссертации:

$$\text{wsat}(K_n, K_{1,t}) = C_t^2.$$

Также в недавней работе Миралаей, Мохаммадиана и Тайфе-Реза были получены точные значения $\text{wsat}(K_n, K_{2,t})$.

Значение числа слабой насыщаемости было получено и для многих других графов G и H , например, для полных многодольных графов, для несвязных копий графов, для гиперкубов и решеток.

В 2017 Коранди и Судаков доказали, что если $s \geq 3$, то $\text{wsat}(K_n, K_s)$ стабильно, т.е., а.п.н. для константного $p \in (0, 1)$,

$$\text{wsat}(G(n, p), K_s) = \text{wsat}(K_n, K_s).$$

Коранди и Судаков также заметили, что их результат может быть обобщен на случай $n^{-\varepsilon(s)} \leq p \leq 1$ и задали следующий вопрос: при каких ограничениях на p а.п.н. выполнено $\text{wsat}(G(n, p), K_s) = \text{wsat}(K_n, K_s)$?

В 2020 году Бидголи, Мохаммадиан, Тайфе-Реза и Жуковский доказали существование пороговой вероятности для свойства $\text{wsat}(G(n, p), K_s) = \text{wsat}(K_n, K_s)$. Более того, они нашли следующие оценки на пороговую вероятность:

- существует $c = c(s)$, т.ч. если $p < cn^{-\frac{2}{s+1}} (\ln n)^{\frac{2}{(s-2)(s+1)}}$, то а.п.н. $\text{wsat}(G(n, p), K_s) \neq \text{wsat}(K_n, K_s)$,
- если $p > n^{-\frac{1}{2s-3}} (\ln n)^2$, то а.п.н. $\text{wsat}(G(n, p), K_s) = \text{wsat}(K_n, K_s)$.

Значение пороговой вероятности свойства стабильности для шаблона K_3 нашли Антонир, Пелед, Шапиро, Темкин и Жуковский. Оно имеет порядок $n^{-1/3-o(1)}$.

Цели и задачи исследования. Целями работы являются:

- изучение различных задач, связанных с поиском остовных подграфов, в том числе степеней гамильтонова цикла и k -вырожденных графов, в случайном графе;
- изучение свойства стабильности числа слабой насыщаемости как при константной вероятности ребра, так и в случае вероятности, стремящейся к нулю.

Для достижения целей решаются следующие задачи:

1. уточнение результата Риордана о пороговой вероятности для широкого класса остовных подграфов;

2. получение точной оценки на максимальную степень гамильтонова цикла в случайном графе;
3. поиск точной пороговой вероятности вхождения k -вырожденных графов в случайный граф;
4. верификация гипотезы о стабильности числа слабого насыщения для широкого класса шаблонов в случае константной вероятности проведения ребра;
5. нахождение пороговой вероятности стабильности для шаблона $K_{1,t}$.

Научная новизна. Для решения полученных задач были

- улучшены имеющиеся методы: придумано усовершенствование доказательства теоремы Риордана, а также произведены обобщение и адаптация идеи «planted trick» для задачи поиска точной пороговой вероятности;
- разработаны новые методы доказательств для изучения свойства стабильности числа слабой насыщаемости.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Улучшена оценка на максимальную степень гамильтонова цикла в случайном графе (по сравнению с применением результата Риордана), найдена асимптотика точной пороговой вероятности для вхождения широкого подкласса k -вырожденных графов (в отличие от просто пороговой вероятности, которую можно было бы получить с помощью имеющихся результатов). Также показана стабильность свойства слабой насыщаемости для широкого класса шаблонов, хотя до нашего исследования результаты были известны только для клик. Более того, нами получен качественный результат, который утверждает стабильность при условии существования процесса насыщения, удовлетворяющего некоторыми локальным ограничениям. Этот результат позволяет доказывать свойство стабильности, не апеллируя к структуре заданного шаблона. Также была найдена пороговая вероятность стабильности для шаблона $K_{1,t}$, что открывает возможность дальнейшего изучения пороговых вероятностей стабильности.

Полученные результаты вносят значительный вклад в теорию случайных графов и существенно улучшают известные ранее результаты, тем самым демонстрирую научную новизну.

Теоретическая и практическая значимость работы. Полученные результаты способствуют динамичному развитию области случайных графов и представляют, в первую очередь, теоретический интерес. Новые результаты о числе слабой насыщаемости и методы, разработанные для их получения, могут быть использованы для доказательства стабильности числа слабой

насыщаемости для большого числа графов-шаблонов. Результаты в области остовных подграфов интересны как сами по себе, так и позволяют находить пороговые вероятности в случаях, когда теорема Риордана недостаточно точна.

Несмотря на то, что диссертация имеет теоретический характер, полученные результаты могут быть применены и на практике. Как писалось выше, в эру больших данных результаты могут иметь приложение для анализа дорожных, социальных и биологических сетей как в теории, так и на практике. Результаты, касающиеся числа слабой насыщенности, связаны с теорией перколяции и могут быть применимы в смежных областях, таких как физика, вирусология или экология.

Методология и методы исследования. Для доказательств использовался аппарат теории графов и теории вероятностей. Кроме стандартных методов, например, методов первого и второго момента, использовались более современные, уже зарекомендовавшие себя методы, такие как «planted trick» или метод из теоремы Риордана, заключающийся в уменьшении дисперсии за счет обуславливания на некоторые типичные события, а также новые комбинаторные и вероятностные подходы. Используется оригинальная идея поэтапного распространения процесса бутстрэп-перколяции на подграфы случайного графа различного размера. Другим новым подходом является двухэтапное доказательство существования процесса бутстрэп-перколяции: в начале процесс строится для некоторого класса неслучайных графов, а далее происходит доказательство того, что а.п.н. случайный граф принадлежит данному классу. Для этого активно используется понятие расширения, введенное Спенсером.

Положения, выносимые на защиту:

1. Получено улучшение результата Риордана о пороговой вероятности вхождения остовного подграфа в случайный граф для некоторых классов подграфов.
2. Улучшена оценка на максимальную степень гамильтонова цикла в случайном графе.
3. Найдена асимптотика точной пороговой вероятности для вхождения широкого класса k -вырожденных остовных подграфов в случайный граф.
4. Доказана стабильность числа слабой насыщенности для широкого класса шаблонов.
5. Найдена пороговая вероятность стабильности числа слабой насыщенности для шаблона $K_{1,t}$.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты опубликованы в трех рецензируемых изданиях [1, 3, 2], включенных в категорию К1 собственного перечня МФТИ, Физтех.

Кроме того, результаты работы были представлены на конференциях и научных семинарах:

- 63 конференция МФТИ, 2020, Долгопрудный, Россия;
- Научный семинар МГУ, 2020, Москва, Россия;
- Конференции международных математических центров мирового уровня, 2021, Сириус, Россия;
- 65 конференция МФТИ, 2023, Долгопрудный, Россия;
- Международная Петрозаводская конференция “Вероятностные методы в дискретной математике”, 2024, Петрозаводск, Россия.

Краткое содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, 7 глав, заключения, списка обозначений и списка литературы из 116 наименований (включая три статьи автора). Объем диссертации 124 страницы, из них 113 страниц текста.

Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте диссертации.

В первой главе кратко обсуждаются основные понятия теории вероятностей, теории графов и теории случайных графов, которые используются в диссертации.

Во второй главе обсуждается история изучения вхождения остовных подграфов в случайный граф, а также излагаются основные новые результаты по данному вопросу, полученные в рамках работы над диссертацией.

Основные результаты приведены ниже.

Теорема 12. Пусть H — граф на $[n]$ с максимальной степенью $\Delta = \Delta(n)$ и имеющий не менее n рёбер. Предположим, что для некоторого положительного $x = x(n) = o(\sqrt{n/\log_2 n})$, $k = k(n) > 0$ и $\beta = \beta(n) > 0$, таких что $x\sqrt{\beta/k} = o(\sqrt{n/\log_2 n})$, каждый подграф H с $v \leq n/x$ вершинами и $c \geq 1$ нетривиальными компонентами имеет не более $kv - \beta c$ рёбер, а все остальные подграфы с $v \in [n]$ вершинами имеют не более kv рёбер. Пусть

$$u = \max\{1, -1 + 1/p\}, \quad \alpha = e(H)/N.$$

Пусть также

1. $\frac{np^2}{\Delta^4} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$,
2. $\alpha^3 N p^{-2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,

3. $\frac{4e^2\Delta^2(2u)^k}{n} < q$ для некоторой константы $0 < q < 1$,
4. $\Delta^4(2u)^{3k-\beta} = o(n)$.

Тогда граф $G(n, p)$ а.п.н. содержит подграф, изоморфный H .

Этот результат позволяет найти оценку $k' = \log_2 n - 2 \log_2 \log_2 n - C$ для максимальной степени гамильтонова цикла в случайном графе, что лучше, чем оценка, получаемая с помощью результата Риордана. Также ее можно применить для других случаев.

Теорема 13. Пусть H — k -вырожденный граф на n вершинах с хотя бы n ребрами и максимальной степенью вершины Δ , где $k \geq 3$. Фиксируем произвольный $\varepsilon > 0$. Если $p > (1 + \varepsilon)2^{1+2/k}e^{2/k}\Delta^{2/k}n^{-1/k}$, то а.п.н. $G(n, p)$ содержит копию H .

Доказательство является прямым приложением теоремы 12. Аналогичный результат может быть получен и для k -й степени гамильтонова цикла, где k постоянно и $k \geq 3$.

Но можно доказать и более точную оценку, что и сделано в работе. А именно, при некоторых дополнительных условиях найдена верхняя оценка на точную пороговую вероятность, равная $(1 + o(1))(e/n)^{1/k}$.

Пусть $p_0 = \left(\frac{e}{n}\right)^{1/k}$. Назовем левой степенью вершины количество ребер, идущих из этой вершины в вершины с меньшим номером, предполагая, что вершины отсортированы так, что эта степень всегда не больше k .

Теорема 14. Пусть F — k -вырожденный граф с максимальной степенью Δ , где $k \geq 3$. Предположим также, что для каждого связного подграфа $H \subseteq F$ количество вершин с меньшим числом ребер в H , чем в F , не превосходит $O(s(H))$, где $s(H)$ — это количество вершин в H с левой степенью меньше k . Пусть также для каждого связного подграфа $H \subseteq F$ количество автоморфизмов $|\text{Aut}(H)| \leq e^{O(s(H))}$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Если

$$p \geq (1 + \varepsilon)p_0,$$

то граф $G(n, p)$ а.п.н. содержит копию F .

Этот результат позволяет легко находить точную пороговую вероятность для k -й степени гамильтонова пути при $k \geq 3$, а также для других графов.

В третьей и четвертой главах излагаются доказательства основных результатов диссертации в области остовных подграфов случайного графа: в третьей главе приводится доказательство Теоремы 12, а в четвертой главе приводится доказательство Теоремы 14.

В пятой главе излагается история изучения процесса бутстрэп-перколяции, в том числе в случайном графе, а также новые результаты, полученные в этой области.

Теорема 15 (О переносе). Пусть H — граф без изолированных вершин, $p \in (0, 1)$, $C > 0$. Для любого $n \in \mathbb{N}$, пусть

- K_n — клика на $[n]$,
- F_n^0 — слабо (K_n, H) -насыщаемый граф, содержащий множество вершин S_n^0 размера не более C , такой что каждая вершина из $[n] \setminus S_n^0$ соединена хотя бы с $\delta(H) - 1$ вершинами S_n^0 .

Тогда а.п.н. существует подграф $F_n \subseteq G(n, p)$, являющийся слабо $(G(n, p), H)$ -насыщаемым и имеющий $\min \{|E(F_n^0)|, |E(G(n, p))|\}$ ребер.

Из этой теоремы следует, что

Следствие 5. Для произвольного графа H без изолированных вершин а.п.н.

$$\text{wsat}(G(n, p), H) = \text{wsat}(K_n, H),$$

если, для любого $n \in \mathbb{N}$, существует минимальный (имеющий $\text{wsat}(K_n, H)$ ребер) слабо (K_n, H) -насыщаемый граф с описанными в теореме 15 свойствами.

Также получен результат о пороговой вероятности стабильности для конкретного шаблона.

Теорема 16. Пусть $t \geq 3$.

- Существует $c > 0$ такая, что если $\frac{1}{n^2} \ll p < cn^{-\frac{1}{t-1}} [\ln n]^{-\frac{t-2}{t-1}}$, то а.п.н. $\text{wsat}(G(n, p), K_{1,t}) \neq \text{wsat}(K_n, K_{1,t})$.
- Существует $C > 0$ такая, что если $p > Cn^{-\frac{1}{t-1}} [\ln n]^{-\frac{t-2}{t-1}}$, то а.п.н. $\text{wsat}(G(n, p), K_{1,t}) \neq \text{wsat}(K_n, K_{1,t})$.

В шестой и седьмой главах излагаются доказательства результатов, касающихся бутстрэп-перколяции: в шестой главе приводится доказательство Теоремы 15, а в седьмой главе излагается доказательство Теоремы 16.

Заключение

В работе исследуются две фундаментальные задачи теории случайных графов: нахождение остовных подграфов и изучение бутстрэп-перколяции. Подробно анализируются пороговые вероятности присутствия различных остовных подграфов в случайных графах, как в общем виде, так и на отдельных важных примерах. Параллельно исследуется стабильность числа слабой

насыщаемости, причем рассматриваются как случай константной вероятности ребра, так и случай вероятности, стремящейся к нулю.

Приложения задач о случайных графах охватывают широкий спектр областей: от моделирования дорожных и социальных сетей до физики, биологии и эпидемиологии. В частности, задачи, связанные с бутстрэп-перколяцией и слабой насыщенностью, могут напрямую моделировать физические процессы и распространение вирусов, что подчеркивает практическую значимость проводимых исследований.

Как задача поиска остовных подграфов, так и задача о слабой насыщенности имеют большую историю, а предложенные результаты закрывают пробелы в этих областях. В частности, в работе получены значительные продвижения в области поиска остовных подграфов.

Получен общий результат, улучшающий известный результат Риордана для некоторых классов остовных подграфов. С помощью этого результата удастся получить наиболее точную оценку на максимальную степень гамильтонова цикла в случайном графе.

Найдена точная пороговая вероятность для k -вырожденного графа с некоторыми ограничениями. В дальнейшем можно продолжить изучение пороговых вероятностей и точных пороговых вероятностей вхождения подграфов, обобщающих k -вырожденные графы, а также других классов подграфов.

В рамках работы проведена адаптация метода «planted trick», которая показывает возможности применения этого метода и в других схожих задачах. Этот метод уже используется во многих других задачах, таких, как sunflower conjecture и др. В дальнейшем было бы интересно рассмотреть его адаптацию и к другим смежным задачам.

Также в рамках исследования для широкого класса графов-шаблонов была доказана стабильность числа слабой насыщенности при константной вероятности ребра, из чего следуют некоторые известные и новые результаты. Любопытно продолжить изучение стабильности для более широкого класса шаблонов, а также применение уже имеющихся результатов к конкретным задачам.

Более того, найдена пороговая вероятность стабильности в случае шаблона-звезды. В рамках дальнейших исследований представляет интерес рассмотреть пороговые вероятности стабильности для других более сложных шаблонов (например, граф $K_{2,t}$, двудольные графы $K_{s,t}$). Все шаблоны, для которых на данный момент известны результаты, представляют собой достаточно простые графы, и в каждом случае решение задачи весьма уникально. Возникает закономерный вопрос: существуют ли какие-то общие способы нахождения пороговой вероятности стабильности для более широких классов шаблонов? Эта тема открывает много возможностей для изучения и представляет существенный интерес. Также необходимо изучение поведения числа слабой насыщенности в окрестности пороговой вероятности и в области, где отсутствует свойство стабильности.

Существует тесная связь между поставленными задачами и такой областью, как bootstrap percolation in polluted environment (бутстрэп-перколяция в загрязненной среде), что открывает возможность применений разработанных методов в смежных задачах.

Благодарности. Автор признателен Максиму Евгеньевичу Жуковскому за постановку задач и неоценимую помощь в работе.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

- [1] Калиниченко О. И., Тайфе-Реза Б., Жуковский М. Е. Слабо насыщенные подграфы случайного графа // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2023. – Т. 509. – С. 46-49.
- [2] Серкова О. И. О некоторых остовных подграфах случайных графов // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. - 2025. - Т. 523. - С. 66-70.
- [3] Kalinichenko O., Zhukovskii M. Weak saturation stability // European Journal of Combinatorics. - 2023. – Vol. 113. – 103777.